



Identification of a Hopf bifurcation with or without parameters

Christian Cortes García
Universidad Surcolombiana

Received: September 4, 2017

Accepted: December 3, 2017

pág 59 - 82

Abstract

In this paper, we present the theoretical guidelines that identify the presence of a generic Hopf bifurcation, with or without parameters, through a point or a line of equilibrium points for a continuous dynamic system. With these defined guidelines, the Hopf bifurcation without parameters is analyzed through the study of viscous contours for a system of partial differential equations conformed by a reaction-diffusion term; with initial condition constant to pieces and a line of equilibrium points that presents a pair of complex eigenvalues conjugated with null real part in its linearization as it approaches the origin. Under appropriate conditions, two cases are distinguished for this type of generic Hopf bifurcation without parameters: hyperbolic and elliptical, generic in the sense that it is a controlled bifurcation in a line of equilibrium points.

Keywords: viscous profiles, hyperbolic system of conservation laws, Riemann problem, equilibrium line.

DOI: 10.25100/rc.v21i2.6699

Identificación de una bifurcación de Hopf con o sin parámetros

Resumen

En este trabajo se presenta los lineamientos teóricos que identifica la existencia de una bifurcación genérica de Hopf, con o sin parámetros, a través de un punto o una línea de puntos de equilibrio para un sistema dinámico continuo. Con estos lineamientos definidos, se analiza la bifurcación de Hopf sin parámetros a través del estudio de contornos viscosos para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales conformado por un término de reacción - difusión; con condición inicial constante a trozos y una línea de puntos de equilibrio que presenta un par de valores propios complejos conjugados con parte real nula en su linealización a medida que se aproxima al origen. En condiciones adecuadas, se distinguen dos casos para este tipo de bifurcación genérica de Hopf sin parámetros: hiperbólica y elíptica, genéricas en el sentido que es una bifurcación controlada en una línea de puntos de equilibrio.

Palabras clave: contornos viscosos, sistema hiperbólico con leyes de conservación, problema de Riemman, línea de equilibrio.

1 Introducción

Una gran variedad de fenómenos en la naturaleza se modelan a través de sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, \alpha) \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ un vector de parámetros y $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo y diferenciable. Algunas variaciones en el vector de parámetros pueden ocasionar cambios en el comportamiento y estabilidad local de los puntos de equilibrio, lo que ocasiona bifurcaciones⁽¹⁾.

Sin embargo, cuando el vector de parámetros $\alpha \in \mathbb{R}^m$ dado en el sistema (1) es sustituido por un vector de estados $v \in \mathbb{R}^m$ y se analiza los cambios en el comportamiento y estabilidad en una línea de puntos de equilibrio, ocurre una bifurcación sin parámetros⁽²⁾. Si dichos cambios de estabilidad se deben a un único par de valores propios imaginarios conjugados con parte real nula, calculados en la matriz jacobiana del campo vectorial en un punto que pertenece a la línea de puntos de equilibrio, se habla de una bifurcación de Hopf sin parámetro⁽³⁾.

Por otro lado, existen diversos problemas presentes en la física, química e ingeniería, los cuales se pueden formular por medio de modelos matemáticos en que la cantidad total es constante a lo largo del tiempo. En este tipo de situaciones, la variable física definida en una región acotada del espacio solo puede variar debido al flujo de la variable a través de la frontera de dicha región. Esto puede traducirse en una formulación integral que, bajo ciertas hipótesis de regularidad, se convierte en un sistema de la forma,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = \frac{1}{\epsilon} g(w) + \epsilon \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

con $w = (w_0(x, t), w_1(x, t), w_2(x, t)) \in \mathbb{R}^3$ la variable de estado, f una función de clase C^2 , $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, g una función de clase C^2 , $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y constantes $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$. En problemas de dinámica de fluidos, el sistema (2) representa problemas de densidad, momento o energía⁽⁴⁾.

Un ejemplo para ilustrar el comportamiento de las soluciones para este tipo de sistemas, con condición inicial constante a trozos⁽⁵⁾, es el siguiente: se tiene un tubo lleno con gas, inicialmente dividido en dos secciones separadas por una membrana, el gas tiene densidad y presión, en reposo, más alta en una mitad del tubo que en la otra. En $t = 0$ se rompe la membrana y el gas fluye. La estructura de la solución del sistema (2) con condición inicial constante a trozos, denominada problema de Riemann, implica tres ondas distintas que separan regiones en las que las variables son constantes: *La onda de choque* se propaga hacia la región de más baja presión; a través de esta onda, la densidad y la presión asumen valores más altos y todas las variables son discontinuas; luego aparece una *discontinuidad de contacto*, a través de la cual la densidad es discontinua, pero las demás variables son constantes; la tercera es *la onda de rarefacción*, en la cual la densidad del gas decrece cuando esta onda pasa a través de él y tiene una estructura diferente: todas las variables son continuas y presentan una transición suave.

En este trabajo se presentan algunos elementos necesarios para identificar la existencia de una bifurcación de Hopf, con o sin parámetros, y determinar bajo qué condiciones el sistema (2) presenta una bifurcación de Hopf sin parámetros, de tipo elíptica o hiperbólica, en una línea de puntos de equilibrio. Para comprender este proceso, se desarrolla los siguientes pasos: en la segunda sección se presenta algunos conceptos y resultados importantes usados en sistemas dinámicos continuos; en la tercera sección, se plantean las condiciones en que un sistema de ecuaciones diferenciales, que depende de un vector de parámetros, presentan bifurcación de Hopf; en la cuarta sección, se explican las diferencias entre la teoría de bifurcaciones en puntos de equilibrio, línea de puntos de equilibrio y sin parámetros, de igual forma se muestra los lineamientos teóricos para la bifurcación de Hopf sin parámetros elíptica e hiperbólica. Por último, se hace el análisis respectivo de la bifurcación de Hopf sin parámetros en una línea de puntos de equilibrio para sistema (2).

2 Preliminares

La formulación matemática de un proceso determinista es un *sistema dinámico*, el cual permite prever cualquier estado futuro si el operador de evolución y su estado inicial son conocidos. Si el tiempo para ese operador se define en la recta real, se habla de un *sistema dinámico continuo* ⁽⁶⁾.

Se observa que todo sistema de la forma

$$\dot{u} = f(u), \quad (3)$$

con $u \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, es un sistema dinámico continuo y sus *trayectorias* $\varphi_f: \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen:

- $\varphi_f(0, u) = u$, para todo $u \in U$,
- $\varphi_f(t + s, u) = \varphi_f(t, \varphi_f(s, u))$, para todo $u \in U$; $t, s \in \mathbb{R}$,
- $\frac{d}{dt} \varphi_f(t, u) = f(\varphi_f(t, u))$.

Si $f(u^*) = 0$, entonces $u^* \in U$ es un *punto de equilibrio* para el sistema (3). El conjunto $L_0 = \{u \in U: \varphi_f(t, u_0) = u \text{ para } t \in \mathbb{R}\}$ es una *órbita* que inicia en $u_0 \in U$.

Una órbita L_0 que inicia en $u_0 \in U$ es *homoclínica* al punto de equilibrio $u^* \in U$ si $\varphi_f(t, u) \rightarrow u^*$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Si existe otro punto de equilibrio $u^{**} \in U$ en el sistema (3), la órbita L_0 que inicia en $u_0 \in U$ es *heteroclínica* a los puntos u^* y u^{**} si $\varphi_f(t, u) \rightarrow u^*$ para $t \rightarrow -\infty$ y $\varphi_f(t, u) \rightarrow u^{**}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Un punto $u_0 \in U$ es un punto *ω -límite* de la trayectoria φ_f del sistema (3), si existe una sucesión $t_n \rightarrow +\infty$ de tal manera que

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, u) = u_0.$$

De manera similar, si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \varphi(t_n, u) = u_1,$$

y el punto $u_1 \in U$; entonces u_1 se le conoce como punto **α -límite** de la trayectoria φ_f del sistema (3).

Al conjunto de todos los puntos ω -límite de una trayectoria L_0 se le llama **conjunto ω -límite de L_0** y se denota por $\omega(L_0)$. De igual manera, se tiene el **conjunto α -límite de L_0** y se denota por $\alpha(L_0)$.

Una **órbita periódica** L_0 es cualquier curva cerrada solución del sistema (3) que no sea un punto de equilibrio. Un **ciclo límite** Ψ es una órbita periódica del sistema (3) el cual es el α -límite o ω -límite de alguna trayectoria de (3) que no sea Ψ .

La **estabilidad en un punto de equilibrio** es conocido como el comportamiento cualitativo de las trayectorias de un sistema de la forma (3), con $f(u) = A \cdot u$ para A una matriz $n \times n$ y punto de equilibrio $u^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ ⁽⁷⁾. Para determinar el comportamiento y estabilidad del punto de equilibrio $u^* = 0 \in \mathbb{R}^n$, se debe encontrar un $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que exista $u \in \mathbb{R}^n$ con $u \neq 0$ que cumpla $(A - \lambda I)u = 0$, con I la matriz identidad $n \times n$. El valor de λ es llamado **valor propio** asociado a la matriz A y el vector $u \neq (0,0)$ es llamado un **vector propio** de A correspondiente a λ . El espacio nulo $\text{Ker}(A - \lambda I)$ es llamado un **espacio propio** correspondiente al valor propio λ y la dimensión del espacio propio es llamada la **multiplicidad** del valor propio λ . Nótese que la matriz A presenta n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ que son soluciones de la ecuación $P(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$, con $P(\lambda)$ el **polinomio característico de A** .

En particular, si A es una matriz 2×2 , la estabilidad del punto de equilibrio $u^* = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ en el sistema $\dot{u} = A \cdot u$, conocido como un **sistema lineal planar**, presenta los siguientes casos:

- Los valores propios λ_1, λ_2 en el sistema lineal son reales y distintos:
 - Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, el origen es un nodo estable,
 - Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, el origen es un nodo inestable,
 - Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, el origen es una silla.
- Los valores propios son complejos conjugados: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$.
 - Si $\alpha = 0$, el origen es un centro,
 - Si $\alpha < 0$, el origen es un foco estable,
 - Si $\alpha > 0$, el origen es un foco inestable.
- Los valores propios son reales e iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.
 - λ posee dos vectores linealmente independientes. El origen es un nodo estrella atractor (repulsor) si $\lambda < 0$ (> 0),
 - λ posee un único vector propio.

En la Figura 1 resume la información geométrica sobre el retrato de fase de $\dot{u} = A \cdot u$ a partir del polinomio característico de A , de la forma $P(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$, y discriminante $\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4\det A$ ⁽⁸⁾.

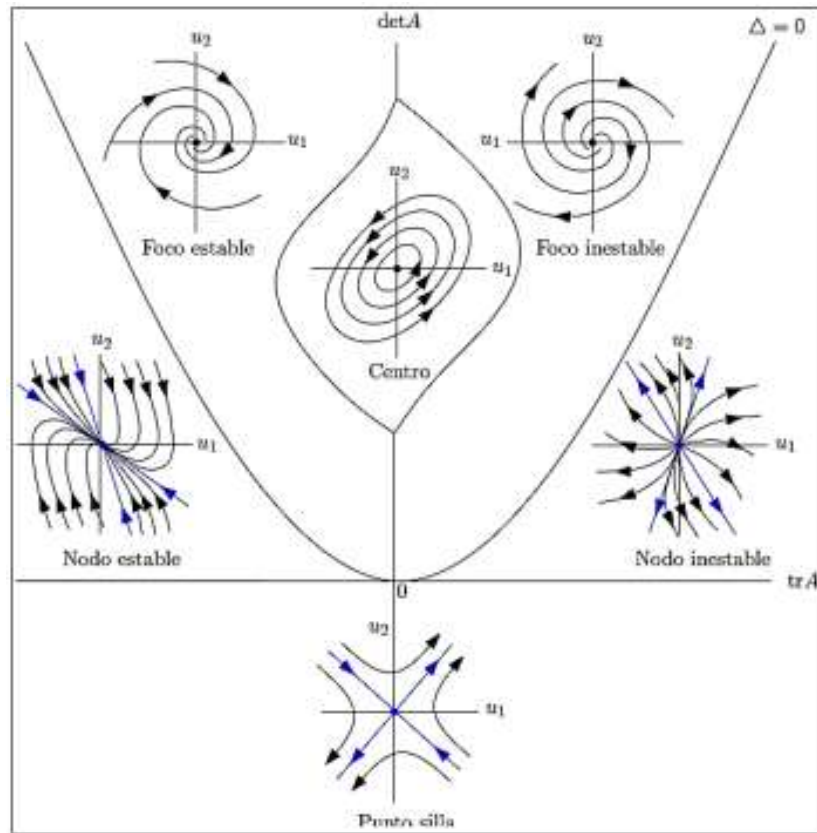


Figura 1. Plano traza – determinante.

Si el campo vectorial $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 definido en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ no es lineal, un punto de equilibrio $u^* \in U$ es un **punto de equilibrio hiperbólico** del sistema (3) si todos los valores propios de la matriz jacobiana $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u^*)$ de f tiene parte real diferente de cero. Se observa que A es la parte lineal del sistema (3) en $u^* \in U$. Por tanto, el siguiente teorema determina la estabilidad local de cada punto de equilibrio hiperbólico $u^* \in U$ del sistema (3) por medio de los valores propios de la parte lineal A calculada en u^* .

Teorema 2.1. (Hartman-Grobman) ⁽⁹⁾. Sea $u^* \in U$ un punto de equilibrio hiperbólico de $\dot{u} = f(u)$ para $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, existe un homeomorfismo $h: V \rightarrow W$ entre vecindades U de u^* y V de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $h \circ \varphi_f = \varphi_A \circ h$ con $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u_*)$, esto es, las trayectorias φ_f y φ_A son localmente conjugados.

Los conjuntos

$$W_s(u^*) = \{u \in U: \varphi_f(t, u) \rightarrow u^*, t \rightarrow +\infty\},$$

$$W_u(u^*) = \{u \in U: \varphi_f(t, u) \rightarrow u^*, t \rightarrow -\infty\}$$

son llamados *invariantes*, donde $W_s(u^*)$ es llamada la *variedad estable* del punto de equilibrio $u^* \in U$ del sistema (3) y, $W_u(u^*)$ la *variedad inestable* de $u^* \in U$.

Si $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u_*)$ es la parte lineal del sistema (3) en $u_* \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 definido en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, la matriz $A_\lambda = A - \lambda I$ posee inversa, entonces λ es el *resolvente* de A . De igual forma, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *valor regular* de A si $R_\lambda(A) = A_\lambda^{-1}$ existe, es acotada y, es definida en un subconjunto denso en \mathbb{R}^n .

El *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u_*)$ es el conjunto de todos los valores regulares $\lambda \in \mathbb{C}$ de A . El complemento $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ es llamado el *espectro* de A , y $\lambda \in \sigma(A)$ es llamado el *valor espectral de A* ⁽¹⁰⁾. Además, el espectro $\sigma(A)$ esta particionado dentro de tres conjuntos de la siguiente manera:

- El *espectro discreto* $\sigma_p(A)$ son valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual $R_\lambda(A)$ no existe. Los $\lambda \in \sigma_p(A)$ corresponden a los valores propios de A ,
- El *espectro continuo* $\sigma_c(A)$ es el conjunto de valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual $R_\lambda(A)$ existe pero no es acotada,
- El *espectro residual* $\sigma_R(A)$ es el conjunto de los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual $R_\lambda(A)$ existe, es acotada, pero no está definida en un subconjunto denso en \mathbb{R}^n .

A partir de las definiciones, se deduce que $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ y $\sigma_R(A)$ son disyuntos dos a dos y que

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_R(A).$$

Por otro lado, dos sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo (3) son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el cual realice un mapeo de trayectorias del primer sistema en trayectorias del segundo sistema ⁽¹¹⁾, preservando la dirección del tiempo, como se ilustra en la Figura 2.

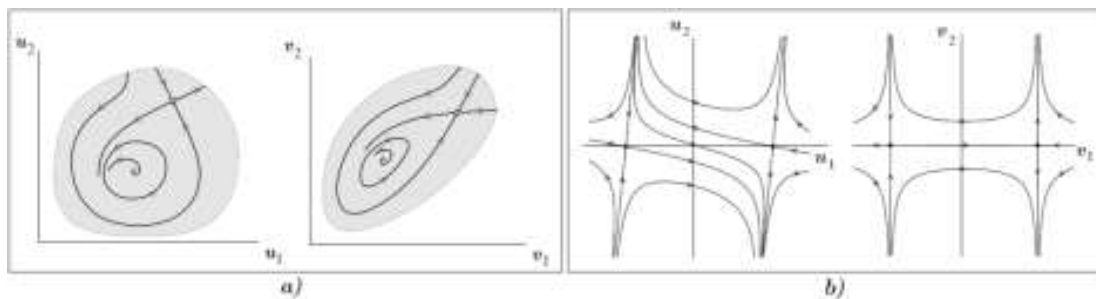


Figura 2. a) Topológicamente equivalente, b) Topológicamente no equivalentes ⁽¹¹⁾.

De esta manera, *la teoría clásica de bifurcaciones* estudia la dinámica de una familia de campos vectoriales de la forma

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, \alpha), \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros que no depende del tiempo $t \in \mathbb{R}$ y, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 ; cuando aparece un retrato de fase no topológicamente equivalente en virtud a la variación del vector de parámetros $\alpha \in \mathbb{R}^m$ del sistema (4).

3 Forma normal y teorema de la bifurcación de Hopf

Considere

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_1 \\ \dot{u}_2 = u_1 + \alpha u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_2 \end{cases} \quad (5)$$

con vector de estado $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$f(u_1, u_2, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - (u_1^2 + u_2^2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

El sistema (5) posee un punto de equilibrio $u^* = (0, 0)$ para todo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. La parte lineal del sistema (5) calculada en $u^* = (0, 0)$ es

$$A(u^*, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

con polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1$. Se tiene como valores propios $\lambda_1 = \alpha + i$ y $\lambda_2 = \alpha - i$. Por el Teorema 2.1, el punto de equilibrio $u^* = (0, 0)$ del sistema (5) es localmente un foco estable si $\alpha < 0$, localmente un foco inestable si $\alpha > 0$ y, cuando $\alpha = 0$ corresponde a una variación drástica del sistema (5) debido a la presencia de un par de valores propios imaginarios conjugados con parte real nula.

Para un mejor análisis del sistema (5), se convierte a un sistema equivalente en coordenadas polares. Primero se introduce la variable compleja:

$$\dot{z} = \dot{u}_1 + i\dot{u}_2 = \alpha u_1 - u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2) + i[u_1 + \alpha u_2 - u_2(u_1^2 + u_2^2)],$$

donde el sistema (5) se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2.$$

Si se toma $z = \rho e^{i\varphi}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$, entonces

$$\dot{\rho} = \rho(\alpha + i - \rho^2) - i\rho\dot{\varphi}.$$

Y el sistema (5) se escribe en forma polar como

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

La ecuación (6) tiene un punto de equilibrio en $\rho = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ dado que solo se considera $\rho \geq 0$. El punto de equilibrio es localmente estable si $\alpha < 0$, no hiperbólico si $\alpha = 0$, y localmente inestable si $\alpha > 0$. Por otro lado, si $\alpha > 0$ existe otro punto de equilibrio $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, el cual describe un ciclo límite que resulta ser estable debido a que las trayectorias tienden a ella cuando $t \rightarrow +\infty$. En la Figura 3 representa los retratos de fase para el sistema (5).

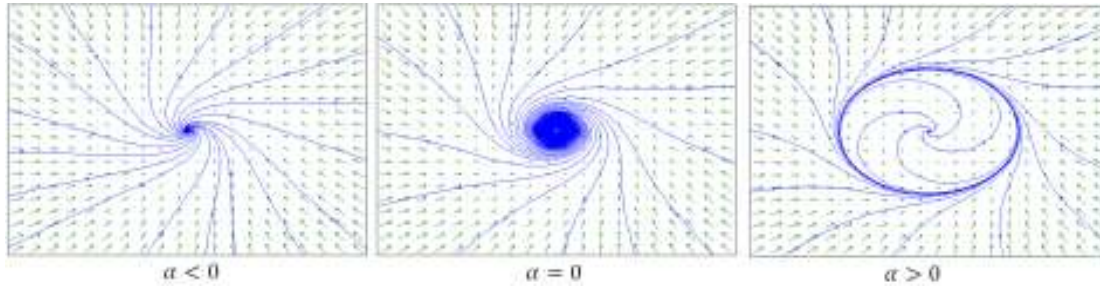


Figura 3. Bifurcación de Hopf Supercrítica.

Un sistema que tiene términos no lineales con signo contrario,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - u_2 + (u_1^2 + u_2^2)u_1 \\ \dot{u}_2 = u_1 + \alpha u_2 + (u_1^2 + u_2^2)u_2, \end{cases} \quad (7)$$

presenta una bifurcación en $\alpha = 0$. A diferencia del sistema (5), el sistema (7) presenta un ciclo límite inestable si $\alpha < 0$ como lo observado en la Figura 4.

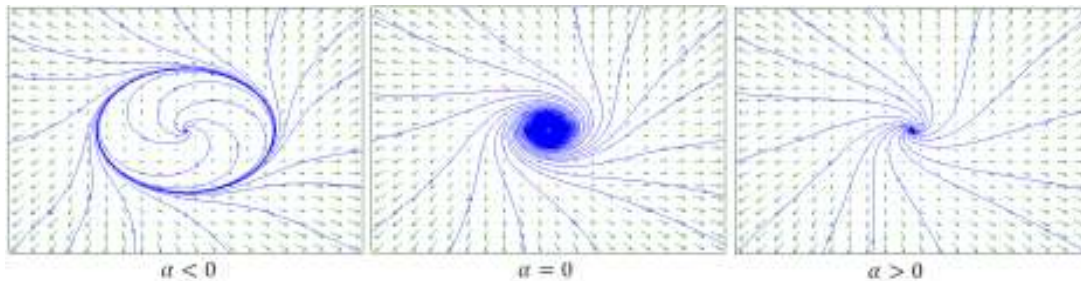


Figura 4. Bifurcación de Hopf Subcrítica.

Por lo tanto existen dos tipos de bifurcación de Hopf: *subcrítica* cuando el ciclo límite inestable existe para todo $\alpha < 0$ y, la *supercrítica* cuando el ciclo límite estable surge después de la bifurcación, es decir, cuando $\alpha > 0$.

Si se considera una familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{u} = f(u, \alpha), \quad (8)$$

con $u \in \mathbb{R}^n$ un vector de estados, $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro y $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 , la **bifurcación de Hopf** se identifica por la presencia de un par de valores propios complejos conjugados con parte real nula en la matriz jacobiana de

$f(u, \alpha)$ calculada en el punto de equilibrio $u^* \in \mathbb{R}^n$, esto es, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ con $\omega_0 > 0$, como se observa en el siguiente Teorema:

Teorema 3.1 (Forma normal de la Bifurcación de Hopf) ⁽¹¹⁾. *Considere el sistema*

$$\dot{u} = f(u, \alpha)$$

con $u \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que existe (u^*, α_0) tal que

1. $f(u^*, \alpha_0) = 0$ (Condición de Equilibrio).
2. La matriz $\frac{\partial}{\partial u} f(u^*, \alpha_0)$ (Condición de Bifurcación), tiene un único par de valores propios complejos conjugados con parte real cero, esto es $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ con $\omega_0 > 0$,
3. $\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \lambda(\alpha_0) \neq 0$ (Condición de Transversalidad o Control), donde $\lambda(\alpha_0)$ es un valor propio de $\frac{\partial}{\partial u} f(u^*, \alpha_0)$,

entonces existe un cambio invertible de coordenadas y parámetros, y una reparametrización del tiempo que transforma el sistema en

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \pm (u_1^2 + u_2^2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + O(\|u\|^4).$$

4 Bifurcación genérica de Hopf sin parámetros

En la teoría clásica de bifurcaciones se analiza, en particular, cuando un punto de equilibrio $u^* \in \mathbb{R}^n$ del sistema (4) pierde su hiperbolicidad en virtud a variaciones del vector de parámetros $\alpha \in \mathbb{R}^m$, esto es, cuando uno de los valores propios de la matriz jacobiana de $f(u, \alpha)$ calculada en $u^* \in \mathbb{R}^n$ es cero o si la parte real de los valores propios complejos conjugados es cero, esto es, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. En el segundo caso corresponde a una *bifurcación de Hopf*.

Si el sistema (4) presenta una línea de puntos de equilibrio de la forma

$$L_e = \{u = (u_0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n: f(u, \alpha) = 0 \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}^m\},$$

la estabilidad en torno a la línea de puntos de equilibrio es analizada para cada punto de equilibrio. Se plantea el siguiente ejemplo ⁽¹²⁾:

Ejemplo 4.1 *Considere el siguiente sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = f(u, \alpha) := \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 + \alpha_3 \\ u_1 \end{pmatrix} + O((|u_1| + |u_2| + |\alpha_3|)^2) \quad (9)$$

con $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Al tomar la parte lineal del sistema (9) en torno al punto de equilibrio $u^* \cong \left(0, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$ con $\alpha_1 \neq 0$, esto

es $\frac{\partial}{\partial u} f(u^*, \alpha)$, se tiene que u^* es localmente una silla si $\alpha_1^2 > 4\alpha_2$, un foco si $\alpha_1^2 < 4\alpha_2$ y, $\alpha_1^2 = 4\alpha_2$ un nodo.

Dado $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_1 \neq 0$ constantes fijas, se observan en las Figura 5, Figura 6 y Figura 7 los retratos fase del sistema (9) en relación a la estabilidad local de la línea de puntos de equilibrio $L_e = \{(u_1, 0) \in \mathbb{R}^2: f(u_1, 0, \alpha_3) = 0 \text{ con } \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$ y el punto u^* .

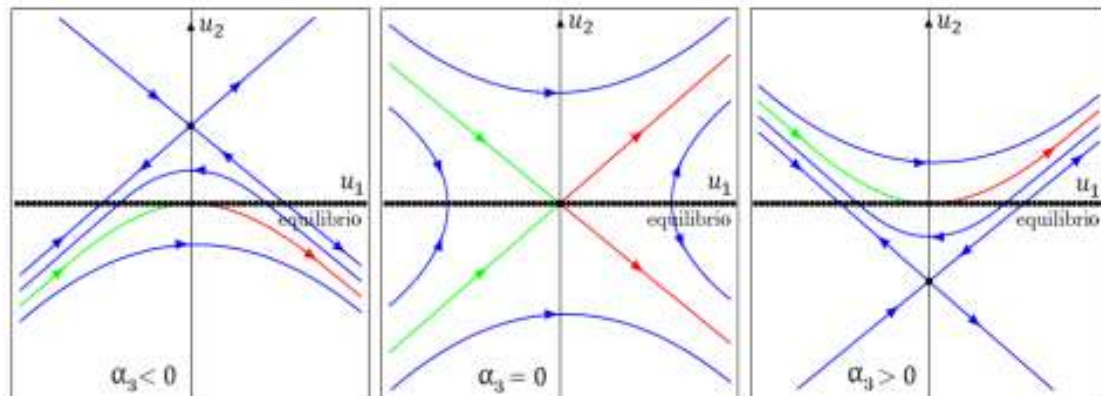


Figura 5. Bifurcación tipo silla del sistema (9). Verde: variedad estable, rojo: variedad inestable⁽¹²⁾.

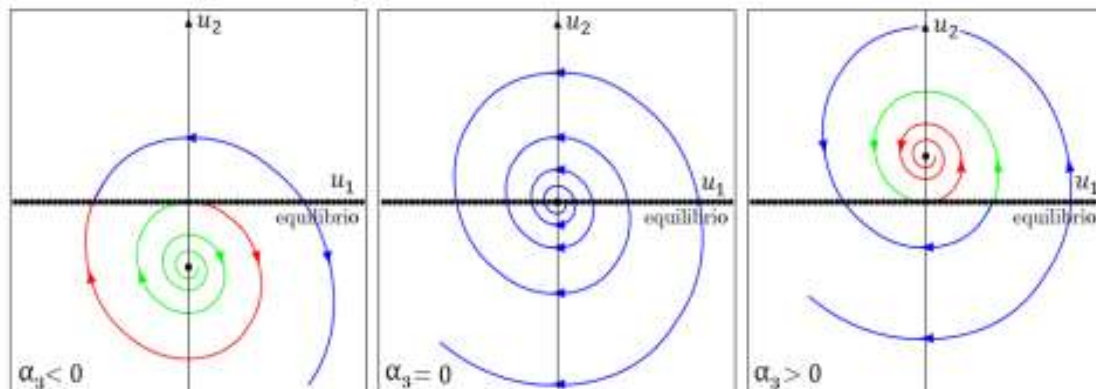


Figura 6. Bifurcación tipo foco del sistema (9). Verde: variedad estable, rojo: variedad inestable⁽¹²⁾.

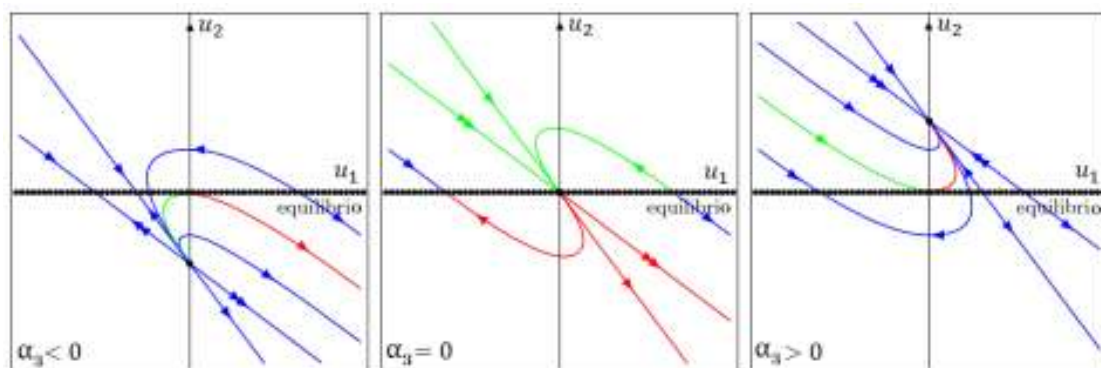


Figura 7. Bifurcación tipo nodo del sistema (9). Verde: variedad estable, rojo: variedad inestable⁽¹²⁾.

Independientemente de las constantes fija $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 > 0$, si $\alpha_3 < 0$ el punto de equilibrio u^* está por debajo de la línea de puntos de equilibrio, si $\alpha_3 > 0$ el punto u^* está por encima de la línea puntos de equilibrio pero, cuando $\alpha_3 = 0$ ocurre una variación del sistema, pues el punto de equilibrio u^* está contenido en la línea de puntos de equilibrio, esto es, $u^* \cong (0,0) \in L_e$. Por otro lado, la línea de puntos de equilibrio es localmente estable si $u_1 < 0$ y localmente inestable para $u_1 > 0$. Cuando $u_1 = 0$, el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico que coincide con u^* para $\alpha_3 = 0$. Así $\alpha_3 = 0$ corresponde a un valor de bifurcación.

La **bifurcación sin parámetros** se presenta al analizar, sin variar algún parámetro adicional, el sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = f^u(u, v) \\ \dot{v} = f^v(u, v), \end{cases} \quad (10)$$

donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ son las variables de estado y $f^u, f^v: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ campos vectoriales de clase C^1 . En la teoría clásica de bifurcaciones corresponde al caso cuando $v = \alpha \in \mathbb{R}^m$ y $f^v \equiv 0$. En la bifurcación sin parámetros, se considera una línea de puntos de equilibrio de la forma

$$f^u(u, 0) = f^v(u, 0) = 0 \quad (11)$$

para todo $u \in \mathbb{R}^n$ y $v = 0 \in \mathbb{R}^m$. De aquí surge una fenomenología dinámica cuando el punto de equilibrio $(0,0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ no es hiperbólico debido a un valor propio nulo o un par de valores propios imaginarios conjugados con parte real nula en la matriz jacobiana del sistema (10) calculada en $(0,0) \in \mathbb{R}^{n+m}$. En particular, se hace énfasis a la presencia de un par único de valores propios complejos conjugados con parte real nula, denominada **bifurcación de Hopf sin parámetros**⁽¹³⁾.

Para ello, considere el sistema (10) con $f^u, f^v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = (f^u, f^v)$ una función de clase C^2 que satisface las siguientes condiciones genéricas,

$$\begin{cases} f(u, 0) = 0 \quad (\text{Línea de puntos de equilibrio}), \\ \frac{\partial}{\partial v} f^v(0,0) = 0 \quad (\text{Condición de bifurcación}), \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f^v(0,0) \neq 0 \quad (\text{Condición de transversalidad o control}). \end{cases} \quad (12)$$

Se observa que la primera condición en (12) representa la línea de puntos de equilibrio que coincide con el eje $u \in \mathbb{R}$. La segunda condición muestra que el segundo valor propio no trivial en la parte lineal del sistema (10) se anula en $u = 0$. De hecho, $\frac{\partial}{\partial v} f^v(u, 0)$ es el segundo valor propio. La tercera condición asegura que este segundo valor propio pasa por cero a una velocidad no nula transversal a u .

Al suponer una cuarta condición, denominada **condición de no degenerancia**,

$$\frac{\partial}{\partial v} f^u(0,0) \neq 0, \tag{13}$$

todo sistema de la forma (10) que satisface las condiciones (12) y (13) cumple con el siguiente resultado,

Teorema 4.1 ⁽¹³⁾. *Considere el sistema (10) y una línea de puntos de equilibrio en \mathbb{R}^2 , dado en (11), que va perdiendo su hiperbolicidad a medida que se aproxima al origen de acuerdo con las condiciones (12) y (13). Entonces existe un difeomorfismo φ de clase C^1 que mapea las órbitas de (10) en órbitas de la forma normal,*

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = zy \end{cases} \tag{14}$$

localmente cercano a $(y, z) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, ver Figura 8. La orientación temporal de las órbitas se conserva.

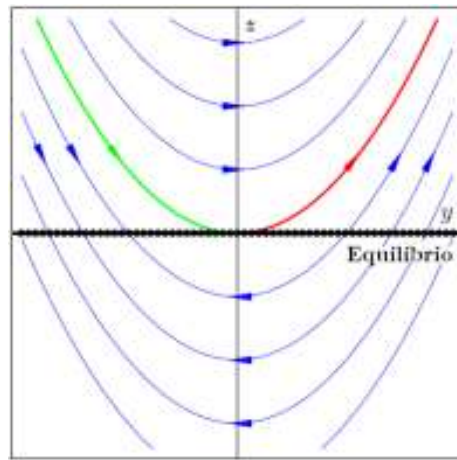


Figura 8. Retrato de fase del sistema (14) ⁽¹³⁾.

Si además, se considera un campo vectorial de clase C^2 tal que $f = (f^u, f^v)$ satisface las condiciones de simetría, esto es,

$$\begin{aligned} f^u(u, -v) &= f^u(u, v) \\ f^v(u, -v) &= -f^v(u, v), \end{aligned} \tag{15}$$

entonces $\frac{\partial}{\partial v} f^u(0,0) = 0$ y la condición de no degenerancia (13) falla. En su lugar, se supone

$$\eta = -\text{sign} \left(\det \left(\frac{\partial^2}{\partial(u, v) \partial v} f(0,0) \right) \right) \neq 0 \tag{16}$$

y vale el siguiente resultado.

Teorema 4.2 ⁽¹³⁾. Considere el sistema (10) que satisface las condiciones (12), (15), (16) y una línea de puntos de equilibrio en \mathbb{R}^2 dado en (11). Entonces existe un difeomorfismo ψ de clase C^1 que mapea las trayectorias de (10) en trayectorias de la forma normal,

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{2}\eta z^2 \\ \dot{z} = zy \end{cases} \quad (17)$$

localmente cercano a $(y, z) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$; ver Figura 9. La orientación en el tiempo se preserva.

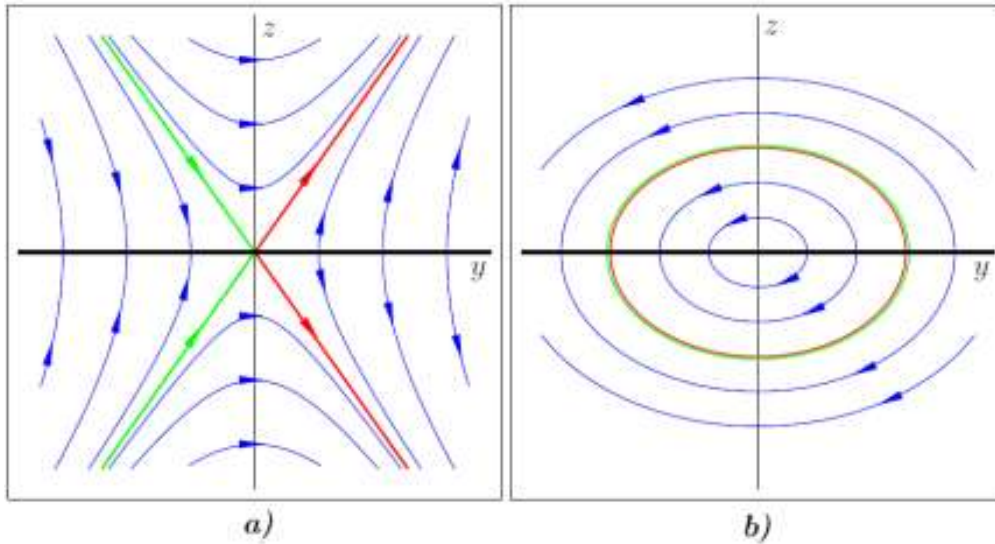


Figura 9. Retrato de fase sistema (17). Caso a) hiperbólica, $\eta = +1$; caso b) elíptica, $\eta = -1$. Roja: variedad inestable; verde: variedad estable ⁽¹³⁾.

Se pasa ahora al caso complejo para el sistema (10), con $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ y un par de valores propios complejos conjugados que cruza el eje imaginario a medida que se aproxima a $(u, v) = (0,0)$ en la línea de puntos de equilibrio. Se asume que (12) es sustituido por,

$$\begin{cases} f(u, 0) = 0 \text{ (Línea de puntos de equilibrio),} \\ \text{Re } \lambda(0) = 0 \text{ (Condición de bifurcación),} \\ \frac{\partial}{\partial u} \text{Re } \lambda(0) \neq 0 \text{ (Condición de transversalidad o control),} \end{cases}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial(u,v)} f(u, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(u) \end{pmatrix}$$

es una matriz compleja, con valor propio $\lambda(u) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Se designa el laplaciano con respecto a la coordenada $v \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ por Δ_v y una condición de no degenerancia dado por

$$\Delta_v f^u(0,0) \neq 0,$$

con

$$\eta = \text{sign} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} \text{Re } \lambda(0) \right) \cdot (\Delta_v f^u(0,0)) \right) = \pm 1,$$

donde el punto de bifurcación en $u = 0$ es *hiperbólica* si $\eta = +1$ y *elíptica* si $\eta = -1$.

Por último, se pasa al caso en que el sistema es de la forma

$$\dot{u} = F(u)$$

con $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial de clase C^2 y una línea de puntos de equilibrio

$$F(u_0, 0, 0, \dots, 0) = 0$$

a lo largo del eje $u_0 \in \mathbb{R}$. Se asume que la matriz jacobiana $\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, 0, \dots, 0)$ posee valores propios reales diferentes, a excepción de un valor propio nulo a medida que se aproxima para $u_0 = 0$ o un par de valores propios complejos conjugados puros, o un par de valores propios complejos conjugados con parte real no nula $\lambda(u_0), \overline{\lambda(u_0)}$ que cruza transversalmente el eje imaginario cuando u_0 se aproxima a cero:

$$\begin{cases} \lambda(0) = i\omega(0), \quad \omega(0) > 0, \\ \text{Re } \lambda'(0) \neq 0 \text{ (Condición de transversalidad)}. \end{cases} \quad (18)$$

Sea Z el espacio propio real bidimensional de $\frac{\partial}{\partial u} F(0)$ asociado a $\pm i\omega(0)$. El simbolo Δ_z es el laplaciano con respecto a las variaciones de u en el espacio propio Z . En las coordenadas de Z se eligen como coeficientes la parte real e imaginaria del vector propio complejo asociado a $i\omega(0)$. Sea P_0 la proyección propia unidimensional del kernel trivial en $\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, 0, \dots, 0)$ a lo largo del eje u_0 . La condición de no degenerancia se define como:

$$\Delta_z P_0 F(0) \neq 0. \quad (19)$$

Al fijar la orientación a lo largo del eje u_0 , se puede considerar $\Delta_z P_0 F(0)$ como un número real. Al depender del signo

$$\eta = \text{sign}((\text{Re } \lambda'(0)) \cdot (\Delta_z P_0 F(0))),$$

se dice que el punto de bifurcación en $u_0 = 0$ es *elíptica* si $\eta = -1$ e *hiperbólica* si $\eta = +1$.

El siguiente resultado muestra el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema

$$\dot{u} = F(u) \text{ para una variedad tridimensional, estable e inestable, a } u = 0.$$

Teorema 4.3 ⁽¹³⁾. *Se asumen que (18) y (19) se cumplen para el campo vectorial de $\dot{u} = F(u)$ de clase C^5 . Entonces, para un entorno U de $u = 0$ se tiene:*

En el caso hiperbólico, $\eta = +1$, todas las trayectorias salen del entorno U para un tiempo t positivo o negativo (posiblemente ambos). Las variedades estables e inestables en $u = 0$ forman conos alrededor del eje positivo u_0 , con cruce asintóticamente elíptica cerca de $u = 0$. Estos conos separan regiones con diferente comportamiento de convergencia como se observa en la Figura 10 a).

En el caso elíptico, $\eta = -1$, todas las trayectorias fuera del equilibrio que inician en U son heteroclinicas a los puntos de equilibrio $u^\pm = (u_0^\pm, 0, \dots, 0)$ y a los lados opuestos de $u_0 = 0$. Si $F(u)$ es una función real analítica cerca de $u = 0$, entonces los conjuntos estables e inestables de u dentro de la variedad central se cortan en un ángulo que posee un límite superior exponencial en términos de $|u^\pm|$, como se observa en la Figura 10 b).

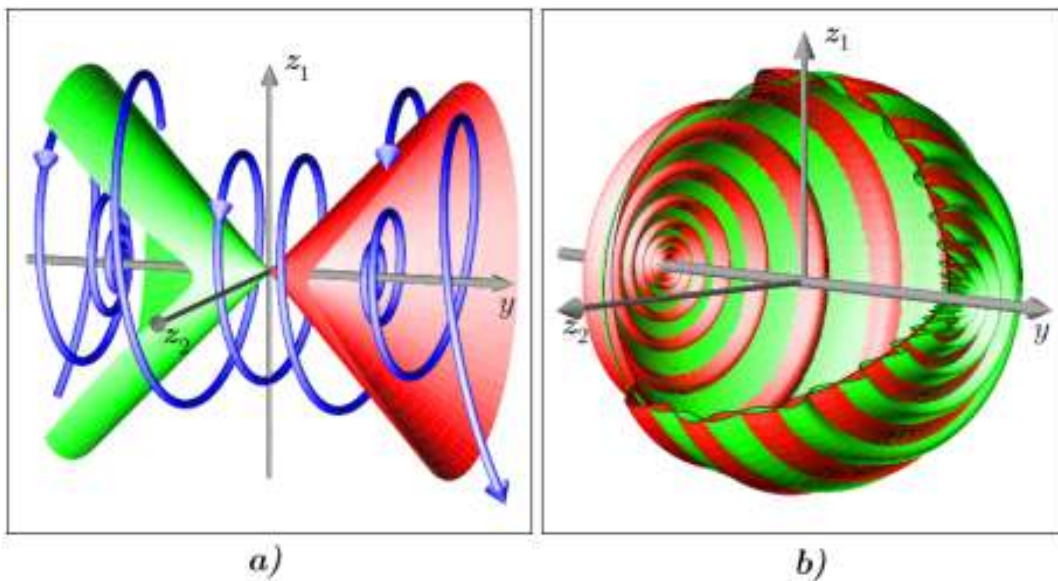


Figura 10. Líneas de puntos de equilibrio (eje y) con valores propios imaginarios. Caso a) hiperbólica, $\eta = +1$; caso b) elíptica, $\eta = -1$. Roja: variedad inestable; verde: variedad estable ⁽¹³⁾.

5 Bifurcación de Hopf en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales

Se considera un sistema dado por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = \frac{1}{\epsilon} g(w) + \epsilon \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{20}$$

con condición inicial constante a trozos, esto es

$$w(x, 0) = \begin{cases} w_L & \text{para } x \leq 0 \\ w_R & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

donde $w = (w_0(x, t), w_1(x, t), w_2(x, t)) = (w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3$ es un vector de estados, $f = (f_0, f_1, f_2)$ un término de flujo de clase C^3 con $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g = (g_0, g_1, g_2)$ un término de reacción de clase C^2 con $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ una constante de regulación; con tiempo real t y espacio x .

Se asume que la matriz jacobiana $A(w) = \frac{\partial f(w)}{\partial w}$ posee valores propios reales simples $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ que pertenecen al espectro de $A(w)$, esto es $\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

Los *contornos viscosos* son soluciones de tipo onda viajera de la forma,

$$w(x, t) = u\left(\frac{x - st}{\epsilon}\right) \tag{21}$$

con velocidad de onda $s \in \mathbb{R}$. Si $\dot{u} = \frac{du}{d\tau}$ con $\tau = \frac{x-st}{\epsilon}$ se observa que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{du}{d\tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{s}{\epsilon} \dot{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon} A(u) \dot{u}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon^2} \ddot{u},$$

que aplicado en (20), da origen a un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$-s \dot{u} + A(u) \dot{u} = g(u) + \delta \ddot{u}, \tag{22}$$

independiente de $\epsilon > 0$ y s en vez de $s \cdot \text{id}$. Para cualquier solución del sistema (22) del cual

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} u(\tau) = u^\pm \tag{23}$$

existen y genera, para $\epsilon \searrow 0$, una solución del sistema (20) con condición constante a trozos, y los valores $u = u^\pm$, el cual viajan a una velocidad de onda s , están conectadas por una onda de choque, como lo observado en la Figura 11 para $u \in \mathbb{R}$.

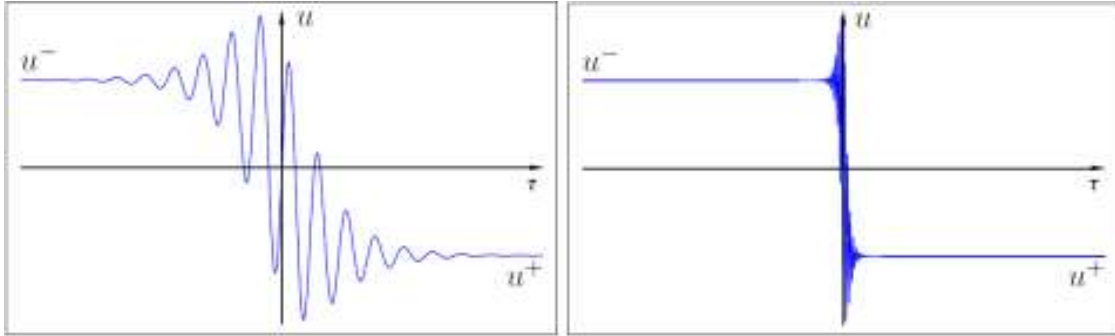


Figura 11. Onda viajera $(u(\tau), \tau)$ con $\epsilon \searrow 0$ ⁽¹⁴⁾.

Se reescribe la ecuación (22) como un sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \delta \dot{v} = -g(u) + (A(u) - s)v, \end{cases} \quad (24)$$

con $v = (v_0, v_1, v_2)$ y s en vez de $s \cdot \text{id}$. Se observa que cualquier contorno viscoso debe satisfacer

$$g(u^\pm) = 0, \quad (25)$$

esto es, los estados asintóticos u^\pm son puntos de equilibrio del término reactivo $g(u)$. Si $g(u)$ tiene un único punto de equilibrio, esto es $u^+ = u^-$, las ondas viajeras no existen.

Se asume que u_0 no contribuye a las condiciones de reacción y los otros componentes u_1 y u_2 se desvanecen hacia $u = 0$. Específicamente:

$$g(u) = g(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

es independiente de u_0 y satisface

$$g(0) = 0, \quad (27)$$

el cual da origen a la línea de equilibrio

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_1, u_2 = 0, \quad v = 0 \quad (28)$$

para el sistema (24).

El comportamiento asintótico de los contornos viscosos $u(\tau)$ para $\tau \rightarrow \pm\infty$ depende de la parte lineal $L^\delta(u, v)$ del sistema (24) en torno a $u = u^\pm, v = 0$, esto es,

$$L^\delta(u, 0) = L^\delta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\delta^{-1}g' & \delta^{-1}(A - s) \end{pmatrix} \text{ en } u = u^\pm, \quad (29)$$

donde $A = A(u)$ y $g' = \frac{\partial}{\partial u} g(u)$ la matriz Jacobiana de los términos de reacción g en $u = u^\pm$. En (29) se escribe s en vez de $s \cdot \text{id}$. Los puntos de equilibrio hiperbólico u^\pm se garantizan para velocidades de onda $s \neq 0$ que no se encuentren en el espectro de $A(u)$, es decir,

$$s \notin \sigma(A(u)) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

De hecho, $s \notin \sigma(A(u))$ asegura que surgen ceros adicionales en el espectro real de $L^\delta(u)$ para $u = u^\pm$, esto es,

$$\sigma(L^\delta(u)) = \{0\} \cup \delta^{-1}\sigma(A(u) - s).$$

Para determinar la presencia de valores propios con parte real nula en $L^\delta(u)$ a medida que se aproxima la línea de puntos de equilibrio $u = (u_0, 0, 0)$ y $v = 0$ en $u_0 = 0$, como se muestra en la Figura 12 se realizan unos cambios con el fin que existan valores propios imaginarios con parte real nula en $L^\delta(u)$ cuando $\delta \searrow 0$.

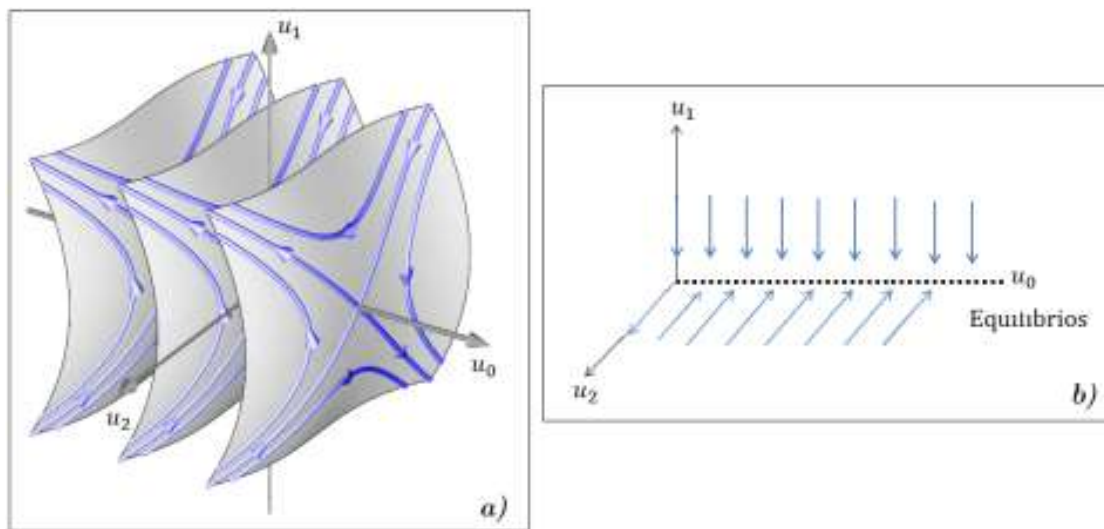


Figura 12. Línea de puntos de equilibrio. Caso a) hiperbólica; caso b) no hiperbólica ⁽¹⁵⁾.

Específicamente, suponga:

$$A(u_0, 0, 0) = A_0 + u_0 \cdot (a_{jk})_{0 \leq j, k \leq 2} \quad (30)$$

con $a_{jk} = a_{kj}$, $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ para $\alpha \neq 0$ y,

$$g'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad |\gamma| < 1. \quad (31)$$

La interacción de este flujo y la reacción es capaz de producir valores propios imaginarios puros en la parte lineal $L^\delta(u)$ del sistema (24), cuyo espectro es:

Proposición 5.1 ⁽¹⁶⁾: *Considere la parte lineal $L^\delta(u_0, 0, 0) = L^\delta(u_0)$ del sistema (24). Se asume que (30) y (31) se cumplen.*

A) *Para $\delta \searrow 0$ y $|s|, |u_0| \searrow 0$, entonces el espectro de $L^\delta(u_0)$ se divide en dos partes:*

I) Una parte no acotada $\sigma_\infty(L^\delta(u)) = \delta^{-1}\sigma(A - s)$

II) Una parte acotada $\sigma_{bd}(L^\delta(u)) = \sigma((A - s)^{-1}g')$

con A y g evaluados en $u = (u_0, 0, 0)$.

B) *Para $\delta = 0$, $s = 0$, $|\gamma| < 1$, la parte acotada $\sigma_{bd}L^\delta(u)$ en $u_0 = 0$ posee valores propios $\lambda_0 \in \{0, \pm i\omega_0\}$, $\omega_0 = \sqrt{1 - \gamma^2}$, con vectores propios $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ dado por $\tilde{v} = \lambda_0 \tilde{u}$ y*

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } \lambda_0 = 0,$$

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma - i\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } \lambda_0 = \pm i\omega_0,$$

Tenga en cuenta que A_0 y $g'(0)$ están dadas como formas normales de Jordan, de tal manera que se produce una bifurcación cuando la velocidad de onda es $s = 0$.

El siguiente teorema identifica una bifurcación de Hopf sin parámetro, elíptico o hiperbólico, para el sistema (20) bajo ciertas condiciones:

Teorema 5.1 ⁽¹⁶⁾. *Considere (23) - (25) para encontrar contornos viscosos con velocidad de onda $s = 0$ en el sistema (20). Se asume que (26) - (28), (30), (31) se cumplen, de modo que $L^\delta(u)$, con $\delta \searrow 0$, posee un par de valores propios imaginarios conjugados con parte real nula.*

Entonces existen matrices $A(u) = \frac{\partial}{\partial u}f(u)$ y $g(u)$, compatibles con los supuestos (30) y (31), de tal manera que las hipótesis y conclusiones del Teorema 4.3 son válidos para el sistema (20). Tanto el caso elíptico como el caso hiperbólico ocurren como lo observado en la Figura 13.

Ya que ambas condiciones son abiertas, los resultados persisten, en particular, para pequeñas velocidades de onda s distintos de cero, incluso cuando f, g permanecen fijos.

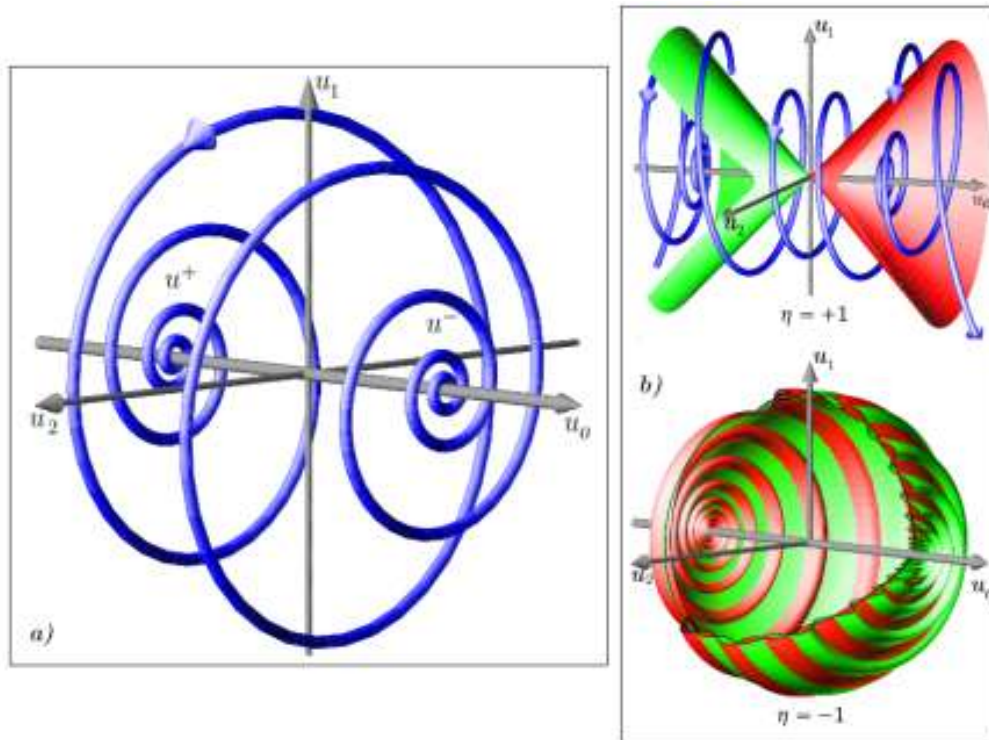


Figura 13. a) Órbita heteroclinicas cerca del punto de Hopf, b) Dinámica cerca de un punto de Hopf a lo largo de una línea de equilibrio: $\eta = +1$ Hiperbólica, $\eta = -1$ Elíptica ⁽¹⁴⁾.

Obsérvese que para el caso hiperbólico, esto es, $\eta = -1$, al menos un par de ondas débiles con colas oscilatorias, conectan los puntos u^- y u^+ . En el caso elíptico, $\eta = +1$, los contornos viscosos salen del entorno U y por lo tanto representan grandes choques.

Para demostrar el Teorema 5.1, se analiza la parte lineal del sistema (20) con velocidad de onda $s = 0$, dado por:

$$L^\delta(u_0) = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\delta^{-1}g' & \delta^{-1}A \end{pmatrix},$$

con $A = A(u_0, 0, 0)$ y $g' = g'(u_0, 0, 0)$.

Se asume que la parte lineal del término de reacción es dado por

$$g'(u_0, 0, 0) = g'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix},$$

independiente de $u_0 \in \mathbb{R}$ como lo planteado en (26).

Por la proposición 5.1, los valores propios imaginarios puros de $L^\delta(u_0)$ surgen de una perturbación $O(\delta)$ de la matriz

$$A^{-1}g' = \left(A_0 + u_0(a_{jk})_{0 \leq j, k \leq 2} \right)^{-1} g'(0)$$

con espectro $\sigma_{bd}(L^\delta(u))$ y $s = 0$. Sean $\lambda(u_0), \bar{\lambda}(u_0)$ los valores propios imaginarios con parte real nula de $A^{-1}g'$, esto es,

$$\lambda(u_0) = i\omega_0, \quad \bar{\lambda}(u_0) = -i\omega_0 \quad \text{con } \omega_0 > 0.$$

Se observa que

$$\operatorname{Re} \lambda(u_0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^{-1}g'),$$

en particular, $\operatorname{tr}(A_0^{-1}g') = 0$. Con la expansión,

$$A^{-1} = \left(A_0 + u_0(a_{jk})_{0 \leq j, k \leq 2} \right)^{-1} = A_0^{-1} - u_0 A_0^{-1}(a_{jk})_{0 \leq j, k \leq 2} A_0^{-1} + \dots$$

se tiene

$$\operatorname{Re} \lambda'(u_0) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(A_0^{-1}(a_{jk})_{0 \leq j, k \leq 2} A_0^{-1}g' \right),$$

y así

$$\operatorname{Re} \lambda'(0) = -\frac{\gamma}{2} (a_{11} + a_{22}) + a_{12}.$$

Por la perturbación $O(\delta)$ del espectro acotado $\sigma_{bd}(L^\delta(u))$, el resultado $\operatorname{Re} \lambda'(0) \neq 0$ es válida para $\delta \searrow 0$ y en vista del Teorema 4.3, se ha comprobado el supuesto (18).

Por otro lado, considere

$$F(\mathbf{u}) = F(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\delta^{-1}g(u) + \delta^{-1}A(u)v \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{u} = (u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $e_0^T = (1, 0, 0)$ un vector unitario en \mathbb{R}^3 y $e_0^T = (e_0^T, 0)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Nótese que el kernel y el co-kernel de $L^\delta(u_0)$ es de dimensión uno, pues $L^\delta(u_0)$ posee un valor propio igual a cero. Es claro que

$$\text{Ker } L^\delta(u_0) = \text{gen}\{\mathbf{e}_0\},$$

pues $g'(u_0, 0, 0)\mathbf{e}_0 = 0$. Para $u_0 = 0$, el co-kernel de $L^\delta(u_0)$ es dado por

$$\mathbf{e}_\delta^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\delta^{-1}g' & \delta^{-1}A_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (32)$$

con $\mathbf{e}_\delta^T = \left(1 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(e_0^T, -\frac{\delta}{\alpha}e_0^T\right)$, y al reemplazar A_0 y g' , dado en (30) y (31), en (32) se tiene

$$P_0^\delta = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\delta^T.$$

Por el cruce transversal del valor propio en $\delta = 0$, se obtienen valores propios imaginarios puros $\pm i\omega^\delta$ en el punto de equilibrio $\mathbf{u}^\delta = (u_0^\delta, 0, 0)$ del eje u_0 para $\delta \searrow 0$. Sea Z^δ el correspondiente espacio propio. Como

$$P_0^\delta = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\delta^T = \left(1 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}_0 \cdot \left(e_0^T, -\frac{\delta}{\alpha}e_0^T\right)$$

con $\mathbf{e}_0 = (e_0^T, 0)^T$, \mathbf{u}^δ , ω^δ , P_0^δ y Z^δ varia con respecto a δ , se deduce el siguiente lema, probado en [9].

Lema 5.1 ⁽¹⁶⁾. *En el ajuste y notación anterior, se tiene*

$$\Delta_Z^\delta P_0^\delta F(\mathbf{u}^\delta) = \left(1 + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\delta} g_0''(u^\delta) [\tilde{u}^\delta, \overline{\tilde{u}^\delta}] \mathbf{e}_0$$

en un punto de equilibrio $\mathbf{u}^\delta = (u^\delta, 0, 0)$ con vectores propios complejos $(\tilde{u}^\delta, \tilde{v}^\delta)$ de $\pm i\omega^\delta$.

En particular, considere la forma cuadrática $g_0''(0)$ sobre (u_1, u_2) , con $\Gamma = \pm 1$ que indica su signo. Entonces:

$$\text{sign } \Delta_Z^\delta P_0^\delta F(\mathbf{u}^\delta) = \Gamma \cdot \text{sign } \alpha,$$

para $\delta \searrow 0$.

Por el lema anterior se comprueba que condición de no dejenerancia (19) es diferente de cero para $\delta \searrow 0$, el cual completa la demostración del Teorema 5.1. Por tanto, el sistema (20) presenta bifurcación de Hopf sin parámetros, $\eta = +1$ para el caso hiperbólico o $\eta = -1$ para caso elíptico, donde

$$\eta = \text{sign}(\text{Re } \lambda'(0)) \cdot (\Delta_z P_0 F(0)) = \text{sign} \left(a_{12} - \frac{\gamma}{2}(a_{11} + a_{22}) \right) \cdot \text{sign } \alpha \cdot \Gamma,$$

con $\delta \searrow 0$. Aquí las derivadas son evaluadas en $u = 0$ y se supone que $\delta \neq 0$ y $\Gamma = \pm 1$ indica el signo de $g''(0)$ sobre (u_1, u_2) .

6 Conclusiones

Se ha realizado un estudio de la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando esta presenta una bifurcación de Hopf, con o sin parámetros, determinar cuándo y en qué condiciones genéricas se puede presentar este tipo de bifurcaciones. Además se concluye que toda bifurcación de Hopf, sin importar que dependa o no de un vector de parámetros, presenta condiciones de equilibrio, de bifurcación y de control o transversalidad.

Por otro lado se observó que bajo ciertas condiciones un sistema de ecuaciones diferenciales parciales conlleva a una bifurcación de Hopf sin parámetros cuando es analizada a través del estudio de contornos viscosos a lo largo de una línea de puntos de equilibrio, del cual presentan órbitas heteroclínicas que conectan los puntos de equilibrio del termino reactivo formando un cono; o el modelo muestra una onda viajera el cual da origen a órbitas periódicas formando entre ellas una esfera de órbitas. A estas condiciones de pérdida de estabilidad de Hopf son llamadas, respectivamente, hiperbólica o elíptica.

Referencias bibliográficas

1. Shoshitaishvili AN. Bifurcations of topological type at singular points of parametrized vector fields. *Functional Analysis and Its Applications*. 1972; 6(2): 169-170.
2. Fiedler B, Liebscher S. Bifurcations without parameters: Some ODE and PDE examples. Higher Education Press, Beijing: International Congress of Mathematicians. 2002; 3:305-316.
3. Fiedler B, Liebscher S, Alexander J. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: III. Binary oscillations. *Int. J. Bif. Chaos Appl. Sci. Eng.* 2000; 10(7):1613–1622.
4. Liebscher S. Stable, Oscillatory Viscous Profiles of Weak, non-Lax Shocks in Systems of Stiff Balance Laws. Dissertation Fachbereich. Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, Berlin, Germany; 2000.
5. Grindrod P. Patterns and Waves: The Theory and Applications of Reaction- Diffusion Equations. Second Edition. Oxford, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. 1996;275
6. Aulbach B. Continuous and discrete dynamics near manifolds of equilibria. *Lecture Notes in Mathematics*, 1058. Berlin, Springer-Verlag. 1984;142.

7. Chicone C. Ordinary Differential Equations with Applications. New York: Springer. 1999;636.
8. Hirsch MR, Smale S. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. New York: Academic Press INC. 1974;358.
9. V.I. Arnold. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Springer, 1988.
10. Tinsley OJ, Demkowicz LK. Applied Functional Analysis. Second Edition. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010;92
11. Y. Kuznetsov. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1995.
12. Fiedler B, Liebscher S. Takens-Bogdanov bifurcations without parameters, and oscillatory shock profiles. Global Analysis of Dynamical Systems, Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday, 2001; 211-259.
13. Alexander JC, Fiedler B, Liebscher S. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. Theory. Journal Diff. Equations. 2000;167(1):16- 35.
14. Harterich J, Liebscher S. Travelling waves in systems of hyperbolic balance laws. Analysis and Numerical Methods for Conservation Laws. Heidelberg, Berlin: Springer. 2005; 281-300.
15. Afendikov A, Fiedler B, Liebscher S. Plane Kolmogorov flows and Takens–Bogdanov bifurcation without parameters: the singly reversible case. Asymptotic Analysis. 2011; 72(1-2); 31-76.
16. Fiedler B, Liebscher S. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: II. Systems of viscous hyperbolic balance laws. SIAM J. Math. Analysis. 2000; 31(6): 1396-1404.

Dirección del autor

Christian Camilo Cortés García

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Surcolombiana, Neiva – Colombia

christian.cortes@usco.edu.co