Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

UNA NOTA SOBRE UN TEOREMA DE UNICIDAD DE MÉTRICAS CONFORMES DE KAZDAN Y WARNER

Jhovanny Muñoz
Universidad del Valle

Recibido: septiembre 30, 2010 Aceptado: noviembre 24, 2010

Pág. 127-132

Resumen

Para una variedad Riemanniana compacta conexa sin frontera n-dimensional (M^n, g) con $n \geq 2$ se estudiarán dos ecuaciones tipo curvatura escalar generalizadas, las cuales son ecuaciones cuasilineales que involucran el p-Laplaciano, con el fin de realizar una prueba de unicidad de soluciones de estas ecuaciones de tal forma que se obtendrá como caso particular de esta prueba una nueva demostración del teorema de unicidad de métricas conformes de Kazdan y Warner.

Palabras y frases claves: Ecuaciones tipo curvatura escalar generalizada, p-Laplaciano, unicidad.

MSC(2000): 53A30, 35J92

Abstract

Given an n-dimensional compact connected Riemannian manifold without boundary (M^n, g) with $n \geq 2$, we study the equations generalized type scalar curvature which are quasilinear equation where the p-Laplacian is involved, with the goal to give a result of uniqueness of solutions of these equations in such a way that we will obtain as a particular case a new proof of the uniqueness result of metrics obtained by Kazdan and Warner.

keywords: Generalized scalar curvature type equations, p-Laplacian, uniqueness.

1 Introdución

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana compacta sin frontera de dimensión, $n \geq 2$. Se denotará por R_g la curvatura escalar en M determinada por la métrica g. Si $\widetilde{g} = \phi g$ donde ϕ es una función diferenciable positiva definida en la variedad M, diremos que $\widetilde{g}$ es una métrica conforme a g. Si $\widetilde{g}$ es una métrica Riemanniana denotaremos con tilde $(\sim)$ todos los términos relacionados con esta métrica.

Recientemente ha surgido gran interés en el estudio de cómo la curvatura escalar determina la métrica g dentro de su clase de métricas conformes, dicho estudio está íntimamente relacionado con el estudio de ecuaciones diferenciales elípticas. En efecto, si $n \geq 3$ y se escribe $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ se tiene que u satisface la siguiente ecuación

$$\Delta_g u - c(n) R_g u + c(n) R_{\widetilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \qquad \text{en} \quad M, \tag{1}$$

donde $c(n) = \frac{n-2}{4(n-1)}$ y Δ_g denota el Laplaciano respecto a la métrica g. Cuando $n = 2$ y se escribe $\widetilde{g} = e^{2u} g$ se tiene que u satisface la siguiente ecuación

$$\Delta_g u - K_g + K_{\widetilde{g}} e^{2u} = 0 \qquad \text{en} \quad M, \tag{2}$$

donde $K_g = 2R_g$ denota la curvatura Gaussiana en M.

Nótese que, en el caso $n \geq 3$ y se escribe $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ se tiene que $g = (\frac{1}{u})^{\frac{4}{n-2}} \widetilde{g}$ y por tanto $\frac{1}{u}$ satisface la ecuación (1) con la modificación del lugar donde aparece g por $\widetilde{g}$ y viceversa, similarmente en el caso $n = 2$, si se escribe $\widetilde{g} = e^{2u} g$ entonces $-u$ satisface (2) con el cambio de lugares de métricas señalado anteriormente. Así, si $R_g = R_{\widetilde{g}}$ y se tiene una implicación geométrica para u, entonces se tiene dualmente una implicación geométrica para $\frac{1}{u}$ y $-u$ si $n \geq 3$ y $n = 2$, respectivamente. En adelante, se referirá a esta propiedad como el cambio de roles de las métricas $\widetilde{g}$ y g.

El estudio mencionado anteriormente es equivalente al siguiente problema: Supongamos que u es solución del problema (1) donde $R_g = R_{\widetilde{g}}$. ¿Si $n \geq 3$ es u la función constante 1? y ¿si $n = 2$ es u la función constante 0?

Así, se tiene un resultado donde la curvatura determina unívocamente la métrica dentro de su clase conforme, resultado que llamaremos de unicidad de métricas conformes o simplemente de unicidad de métricas, si y sólo si se tiene un resultado de unicidad de las soluciones de las ecuaciones (1) y (2).

En este contexto Kazdan y Warner (ver [8]) obtuvieron el siguiente resultado de unicidad de métricas conformes.

Teorema 1. *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana compacta conexa sin frontera de dimensión $n \geq 2$. Si $\widetilde{g}$ es una métrica conforme a g con $R_g = R_{\widetilde{g}} \leq 0$ y R_g no nula, entonces $\widetilde{g} = g$.*

El objetivo de esta nota es mostrar un resultado de unicidad sobre las soluciones de dos ecuaciones cuasilineales que involucran el p-Laplaciano, tal que generalice el Teorema 1, con la ventaja adicional de tener una prueba muy simple que no incluye el principio del máximo, el cual es usado en la prueba de algunos resultados de unicidad de métricas (ver [4], [9]).

Esta nota está organizada de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta una prueba del Teorema 1 y en la Sección 3 se presenta una generalización del Teorema 1.

2 Teorema de unicidad de métricas de Kazdan y Warner

A continuación, se presentará una prueba del Teorema 1 la cual es una adaptación de la dada para el Teorema 1 en [9] (ver también proposición 1 en [5]) y que a su vez utiliza el principio del máximo.

Demostración Teorema 1. Sean $n \geq 3$ y $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ una métrica conforme a g, tal que $R_g = R_{\widetilde{g}}$ y $h_g = h_{\widetilde{g}}$. Si se define $v = u^{\frac{-4}{n-2}} - 1$, entonces mediante un cálculo directo puede verificarse que v satisface

$$\Delta v + \frac{R_g}{n-1} v = \frac{4(n+2)}{(n-2)^2} u^{-\frac{2n}{n-2}} |\nabla u|^2 \geq 0. \tag{3}$$

Dado que $R_g \leq 0$, el principio del máximo nos lleva a que $v < 0$ o v es una constante no negativa.

Si $v < 0$, se tiene $u < 1$ y por tanto $\widetilde{g} < g$.

En el caso que v sea una constante no negativa se tiene que el lado izquierdo de la ecuación (3) es no positivo, por tanto $|\nabla u| = 0$, lo anterior y la conexidad de M llevan a que u es constante.

Si u es constante la ecuación (1) se reduce a la forma

$$c(n) R_g u (1 - u^{\frac{4}{n-2}}) = 0.$$

Dado que u es positiva y R_g no es idénticamente nula se concluye que $u = 1$ y $\widetilde{g} = g$.

En resumen, $\widetilde{g} < g$ o $\widetilde{g} = g$. Cambiado los roles de $\widetilde{g}$ y g se obtiene $g < \widetilde{g}$ o $g = \widetilde{g}$. Lo anterior sólo es posible si $\widetilde{g} = g$.

En el caso $n = 2$ se considera $\widetilde{g} = e^{2u} g$ y $v = e^{-2u} - 1$, así un cálculo directo permite verificar que v satisface

$$\Delta v + 2K_g v = 4e^{-2u} |\nabla u|^2 \text{en} \quad M. \tag{4}$$

Argumentando como en el caso $n \geq 3$ se completa la prueba del lema. □

3 Generalización del teorema de unicidad de métricas de Kazdan y Warner

En adelante se considerará una generalización de la ecuación de deformación conforme dada por

$$\Delta_p u - H(x) u^{\alpha} + I(x) u^{\beta} = 0 \quad \text{en} \quad M, \tag{5}$$

donde $\alpha, \beta > 0$ y $\beta > \alpha$, $H, I : M \to \mathbb{R}$ son funciones definidas en M y $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ es conocido como el p-Laplaciano de $u : M \to \mathbb{R}$. El autor agradece al revisor por sugerir la generalización presentada.

Es importante resaltar que el estudio de soluciones positivas es interesante pues estas existen en el caso geométrico $\alpha = p - 1$ y $\beta = \frac{pn}{n-p}$ cuando $n \geq 3$, $1 < p < n$ y para funciones positivas H e I (ver [2]). Además, manteniendo las mismas restricciones sobre n y p, se puede verificar la existencia de soluciones positivas utilizando otras hipotesis sobre H e I (ver [1]), en consecuencia existen soluciones positivas para el subcaso $p = 2$ que corresponde a la ecuación (1). Para ver otros estudios acerca de las soluciones positivas de la ecuación (5) con $\alpha = p - 1$ y $\beta = \frac{pn}{n-p} - 1$ remitimos al lector a [3] y [6]. De igual forma, si β, α, H e I satisfacen las condiciones anteriores se tiene que la ecuación

$$\Delta_p u - H(x)e^{\alpha u} + I(x)e^{\beta u} = 0 \quad \text{en} \quad M, \tag{6}$$

generaliza la ecuación (2). La ecuaciones (5) y (6) las llamaremos *ecuaciones tipo curvatura escalar generalizadas.*

Además, nótese que si H e I coinciden en M entonces la función constante 1 y la función constante 0 son soluciones de la ecuación (5) y (6), respectivamente.

A continuación, se presentará un teorema de unicidad sobre las soluciones del problema (5) y (6) tal que generalice el Teorema 1

Teorema 2. *Sean (M, g) una variedad compacta conexa sin frontera de dimensión $n \geq 2$, $\beta > \alpha$ y H e I funciones de M en $\mathbb{R}$ tal que $H = I \leq 0$ y H no nula. Si u es una solución positiva de la ecuación (5) entonces $u = 1$. Si u es una solución de (6) entonces $u = 0$.*

Demostración. Sea u una solución de (5) tal que $H(x) = I(x)$ para todo x en M. De la ecuación (5) y multiplicando por $1 - u^{\beta-\alpha}$ se obtiene

$$(1 - u^{\beta-\alpha})\Delta_p u = H(x)u^{\alpha}\left(1 - u^{\beta-\alpha}\right)^2. \tag{7}$$

Integrando por partes en la igualdad (9) se obtiene

$$(\beta - \alpha)\int_M u^{\beta-\alpha-1}|\nabla u|^p = \int_M H(x)u^{\alpha}\left(1 - u^{\beta-\alpha}\right)^2. \tag{8}$$

Dado que $\beta > \alpha$, u es positiva y H es no positiva, se tiene en la igualdad (8) que el lado izquierdo es no negativo, mientras que el lado derecho debe ser no positivo y por tanto ambas integrales son iguales a cero, esto implica que $|\nabla u| = 0$, lo anterior y la conexidad de M llevan a que u es constante.

Si u es constante la ecuación (1) se reduce a la forma

$$H(x)u^{\alpha}\left(1 - u^{\beta-\alpha}\right) = 0.$$

Nuevamente, teniendo en cuenta que u es positiva y H no es identicamente nula, se concluye que $u = 1$.

En el caso que u sea una solución de (6) tal que $H(x) = I(x)$ para todo x en M se obtiene de multiplicar $1 - e^{(\beta-\alpha)u}$ en (6) la siguiente ecuación

$$(1 - e^{(\beta-\alpha)u})\Delta_p u = H(x)e^{\alpha}\left(1 - e^{(\beta-\alpha)u}\right)^2. \quad (9)$$

Argumentando como en el caso anterior, pero teniendo en cuenta que en lugar de usar la ecuación (5) se usa la ecuación (6) se concluye que $u = 0$. □

Mencionamos que si se aplica, para el caso de las ecuaciones (5) y (6), un argumento similar al que se presentó en la prueba del Teorema 1, el cual usa el principio del máximo, se concluiría, para la ecuación (5) que $u < 1$ o $u = 1$ y para la ecuación (6) que $u < 0$ o $u = 0$, pero este argumento no llevaría a concluir que $u = 1$ o $u = 0$ en dichas ecuaciones, puesto que en estas no se tiene la implicación geométrica para u que llamamos anteriormente cambio de roles de las métricas.

Agradecimientos

El autor agradece a la Universidad del Valle, Cali, Colombia por la financiación del proyecto de investigación Cod. 7802, en el cual se desarrolló este trabajo, al profesor Gonzalo García por sus comentarios y a los evaluadores por la lectura y sugerencias sobre este documento.

Referencias bibliográficas

[1] Benalili, M.; Maliki, Y. (2006) Solving p-Laplacian equations on complete manifolds, *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2006, No. 155, 9 pp. (electronic).

[2] Druet, O. (2000) Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 130A, 767-788.

[3] Demengel F.; Hebey E. (1998) On some nonlinear equations involving the p-Laplacian with critical Sobolev growth. *Adv. Diff. Eqns.* 3, 533 - 574.

[4] Escobar J. F. (2003) Uniqueness and non-uniqueness of metrics with prescribed scalar and mean curvature on compact manifolds with boundary, *J. Funct. Anal.* 202, No. 2, 424 - 442.

[5] García, G.; Muñoz J. (2009) About the uniqueness of conformal metrics with prescribed scalar and mean curvatures on compact manifolds with boundary. *Revista de Ciencias* Vol. 13, 71 - 79. Sitio web: http://revistaciencias.univalle.edu.co/

[6] Guedda M.; Véron L. (1989) Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Nonlinear Analysis TMA* 13, 879-902.

[7] Kazdan, J. L.; Warner, F. W. (1974) Curvature function for compact 2- manifolds, *Ann. of Math.* 99, 14 - 47.

[8] Kazdan, J. L.; Warner, F. W. (1975) Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure, *J. Diff. Geom.* 10, 113 -134.

[9] Lou, Yuan. (1998) Uniqueness and non-uniqueness of metrics with prescribed scalar and mean curvature on compact manifolds, *Indiana University Mathematical Journal*, 47 No 3. 1065-1081.

Dirección del autor

Jhovanny Muñoz
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
jhovamu@univalle.edu.co