UNA EXTENSION DEL TEOREMA DE KOLESOV Y SOLUCIONES PERIODICAS DE UN SISTEMA DE REACCION–DIFUSION

José Raul Quintero H.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle

Resumen

En este artículo hacemos una extensión del teorema de Kolesov al caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parabólicas y demostramos la existencia de soluciones clásicas priódicas de un sistema de Reacción – Difusión especial.

Introducción

En años recientes, uno de los sistemas de Reacción – Difusión que se ha estudiado en el sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales parabólicas

$$L_i[U_i] = f_i(x,t,U_1,U_2), i = 1,2(x \in \Omega, t \in (0,\infty)) \tag{0.1}$$

bajo las condiciones iniciales

$$U_i \equiv 0, i = 1,2(x \in \partial\Omega, t \in [0,\infty)), \tag{0.2}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n, \partial\Omega$ es la frontera de Ω, L_i son operadores uniformemente parabólicos de la forma:

$$L_i \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^i(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=i}^{n} b_j^i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + C^i(x,t) \right\} \quad (i = 1,2),$$

y $f_i \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $(i = 1,2)$ (ver [Pa], [Q1], [Q2]).

De otro lado, un modelo para la descripción del fenómeno de Epidemias considerando el efecto de la difusión es el sistema acoplado de dos ecuaciones parabólicas.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla(D_1(x) \cdot \nabla U) & = & -aU - c_1 G(V)U + q_1, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \nabla(D_2(x) \cdot \nabla V) & = & -bV + c_2 G(V)U + q_2, \end{array} \right. \quad (x \in \Omega, \quad t \in (0,\infty))$$

donde $U \equiv U(x,t)$, $V \equiv V(x,t)$ representan la población susceptible y la población infectada respectivamente; $D_1 \equiv D_1(x)$, $D_2 \equiv D_2(x)$ son los coeficientes de difusión; a, b, c_1, c_2 son las constantes de reacción y q_1, q_2 son los posibles factores externos. La funcional $G(V)$ está definida por

$$G(V)(x,t) = \int_\Omega g(x,s)V(s,t)ds$$

donde g es una función continua y positiva en $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ (ver [Pa]).

Pao estableció para el sistema (0.1), (0.2) un teorema de existencia y unicidad mediante el método de iteración monótona (supersoluciones y subsoluciones), e investigó el comportamiento asintótico de las soluciones suponiendo un cierto comportamiento monótono de las funciones f_i en las variables U_1, U_2. (Ver [Pa]). Nosotros establecimos un teorema de existencia de soluciones periódicas positivas del sistema (0.1), (0.2) para

$$f_1(U_1, U_2) = -aU_1 - c_1 G(U_2)U_1 + q_1 \ ,$$

$$f_2(U_1, U_2) = -bU_2 + c_2 G(U_2)U_1 + q_2 \ ,$$

usando también el método de iteración monótona y suponiendo que las constantes de reacción y factores externos son positivos. En nuestra demostración es esencial garantizar la existencia de Supersoluciones y Subsoluciones periódicas del sistema (0.1), (0.2) para demostrar el teorema de existencia (ver [Q1, Teorema 2.3]).

Los objetivos de este artículo son dos:

a) Extender el teorema de Kolesov (ver [Ko]) al caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parabólicas para construir, a partir de funciones no necesariamente periódicas, supersoluciones y subsoluciones periódicas del sistema bajo condiciones de frontera:

$$(R-D)\begin{cases} L_1[U] = -aU - c_1G(V)U + q_1, & \\ L_2[V] = -bV + c_2G(V)U + q_2, & (x \in \Omega,\ t \in (0,\infty)) \\ \quad U \equiv V \equiv 0, & x \in \partial\Omega\ ,\ t \in [0,\infty) \\ \quad U > 0, V > 0, & (x \in \Omega,\ t \in (0,\infty)) \\ \quad U, V \quad t - -\text{periódicas} & \end{cases}$$

donde L_1 y L_2 son operadores uniformemente parabólicas en $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$.

b) Probar la existencia de soluciones clásicas periódicas del sistema bajo condiciones de frontera.

$$(R-D)^{*}\begin{cases} L_1[U] = -aU - c_1G(V)U + q_1, & \\ L_2[V] = -bV + c_2G(V)U, & (x \in \Omega,\ t \in (0,\infty)) \\ \quad U \equiv V \equiv 0, & (x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty)) \\ \quad U > 0, V > 0, & (x \in \Omega,\ t \in (0,\infty)) \\ \quad U, V \quad t - -\text{periódicas} & \end{cases}$$

donde $L_i = \frac{\partial}{\partial t} - \overline{L}_i$, con $\overline{L}_i$ operadores uniformemente elípticos de la forma

$$\overline{L}_i = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{a}^i_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=i}^{n} \overline{b}^i_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{C}^i(x). \quad (i = 1, 2)$$

Preliminares

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave, $[a,b]$ un intervalo compacto y u una función real definida sobre $\overline{\Omega} \times [a,b] = D$. Nosotros diremos que $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ $(\alpha < 1)$, si el número

$$H^D_\alpha(u) = Sup\left\{\frac{|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)|}{[||x_1 - x_2||^2 + |t_1 - t_2|]^{\alpha/2}},\ (x_i,t_i) \in D, (x_1,t_1) \neq (x_2,t_2)\right\}$$

es finito. El conjunto de tales funciones es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{C^{\alpha,\alpha/2}(D)} = ||u||_\infty + H^D_\alpha(u)$$

donde, $||u||_\infty = Max_D|u|$.

Diremos que $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D)$ si $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$ pertenecen al espacio $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ para $1 \leq i,j \leq n$, y la norma de u se define como la suma de las $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ – norma de tales funciones. Similarmente $C^{1+\alpha,\alpha/2}(D)$ se define como el conjunto de funciones $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(D)$ tale que $u_{x_i}, 1 \leq i < n$ pertenecen a $C^{\alpha,\alpha/2}(D)$.

Definimos $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ al conjunto de funciones en $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}\times I)(C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times I))$ para todos los intervalos compactos $I \subsetneq [0,\infty)$.

Diremos que $g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$, si el número

$$H_{\alpha}^{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}(g) = Sup\left\{\frac{|g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)|}{[||x_1-x_2||^2+||y_1-y_2||^2]^{\alpha/2}},\right.$$
$$\left.(x_i,y_i)\in D(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)\right\}$$

es finito.

En adelante supondremos que T es un número real positivo fijo y $\mathbf{E}$ denota el espacio de Banach

$$E = \left\{u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[0,\infty)) : u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,\infty),\right.$$
$$\left.u(x,t)=u(x,t+T)\right\}$$

con la norma,

$$||u||_E = ||u||_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[0,T])}$$

Supersoluciones y Subsoluciones periódicas.

En adelante supondremos que:

A$_1$. Los operadores L_i y $\overline{L_i}$ tienen la forma:

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t} - \left\{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^i(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j^i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j} + C^i(x,t)\right\}(i=1,2),$$

y

$$\overline{L}_i = \sum_{j,k-1}^{n} \overline{a}_{jk}^i(x)\frac{\partial^2}{\partial xj\partial ak_.} + \sum_{j=1}^{n}\overline{b}_j^i(x)\frac{\partial}{\partial xj} + \overline{C}^i(x) \quad (i=1,2)$$

A$_2$. Los operadores L_i y $\overline{L}_i$ son uniformemente parabólicos y elípticos en $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ y $\overline{\Omega}$ respectivamente. Esto es, existen constantes $m, \overline{m} > 0$ tales que:

Para todo x= $(x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\Omega}$, $t \geq 0$, y cualquier n–úpla de números reales $(z_1, \cdots, z_n) \neq (0, \cdots, 0)$, las desigualdades:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a^i_{jk}(x,t) z_j z_k \geq m \sum_{j=1}^{n} z_j^2,$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{a^i_{jk}}(x) z_j z_k \geq \overline{m} \sum_{j=1}^{n} z_j^2$$

son válidas para $i = 1, 2$.

A$_3$. Los coeficientes de $L_i (i = 1, 2)$ están en $C^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ y son t–periódicos de período T, y $C^{(i)} \leq 0, \overline{C}^{(i)} \leq 0$ en $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ y $\overline{\Omega}$ respectivamente.

A$_4$. La función $g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ y $g > 0$ en $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

A$_5$. Los números reales a, b, c_1, c_2 son positivos.

3.1 Definición Sean $\tilde{U}_i, U_i \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$. Diremos que $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$ y (U_1, U_2) son supersoluciones y subsoluciones de $(R - D)$ ó $(R - D)^*$ respectivamente, si son t–periódicas de período T y satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{rcll}
L_1 \tilde{U}_1 & \geq & -a\tilde{U}_1 - c_1 G(U_2)\tilde{U}_1 + q_1, & \\
L_1 U_1 & \leq & -aU_1 - c_1 G(\tilde{U}_2) U_1 + q_1, & \\
L_2 \tilde{U}_2 & \geq & -b\tilde{U}_2 + c_2 G(\tilde{U}_2)\tilde{U}_1 + q_2, & \\
L_2 U_2 & \leq & -bU_2 + c_2 G(U_2) U_1 + q_2, & \\
 & & \tilde{U}_i \geq U_i \geq 0 & \text{en } \Omega \times [0, \infty), \\
 & & \tilde{U}_i \geq 0 \geq U_i & \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty),
\end{array}$$

3.2 Teorema de Extensión de Kolesov. Sean $T_1 > T$ y $q_i \in C(\overline{\Omega})$, $(i = 1, 2)$. Si existen funciones $\overline{U}, \overline{V}, \underline{U}, \underline{V}$ en $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0, T_1])$ tales que:

$$\begin{array}{rclcl}
L_1 \overline{U} & \geq & -a\overline{U} & - & c_1 G(\underline{V})\overline{U} + q_1, \\
L_1 \underline{U} & \leq & -a\underline{U} & - & c_1 G(\overline{V})\underline{U} + q_1, \\
L_2 \overline{V} & \geq & -b\overline{V} & + & c_2 G(\overline{V})\overline{U} + q_2, \\
L_2 \underline{U} & \leq & -b\underline{V} & - & c_2 G(\underline{V})\underline{U} + q_2,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\overline{U}(x,0) \geq \overline{U}(x,T), & \underline{U}(x,0) \leq \underline{U}(x,T), & (x \in \overline{\Omega}) \\
\overline{V}(x,0) \geq \overline{V}(x,T), & \underline{V}(x,0) \leq \underline{V}(x,T), & (x \in \overline{\Omega}) \\
\overline{U}(x,t) \geq 0 \geq \underline{U}(x,t), & \overline{V}(x,t) \geq 0 \geq \underline{V}(x,t), & ((x,t) \in \partial\Omega \times [0, T_1]) \\
\overline{U}(x,t) \geq \underline{U}(x,t) \geq 0, & \overline{V}(x,t) \geq \underline{V}(x,t) \geq 0, & ((x,t) \in \Omega \times [0, T_1])
\end{array}$$

Entonces existen funciones $\tilde{U}_i, U_i \in \mathbf{E}$ $(i = 1, 2)$ tales que $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$ y (U_1, U_2) son supersoluciones y subsoluciones de los problemas $(R - D)$ y $(R - D)^*$.

Demostración: Definamos las siguientes funciones
$f_1(x, t, U) = -aU - c_1G(\underline{V})U + q_1$
$f_2(x, t, U) = -aU - c_1G(\overline{V})U + q_1$.

Por hipótesis,

$L_1[\overline{U}] \geq -a\overline{U} - c_1G(\underline{V})\overline{U} + q_1 = f_1(x, t, \overline{U})$

$L_1[\underline{U}] \leq -a\underline{U} - c_1G(\overline{V})\underline{U} + q_1 \leq f_1(x, t, \underline{U})$

$L_1[\overline{U}] \geq -a\overline{U} - c_1G(\underline{V})\overline{U} + q_1 \geq f_2(x, t, \overline{U})$

$L_1[\underline{U}] \leq -a\underline{U} - c_1G(\overline{V})\underline{U} + q_1 = f_2(x, t, \underline{U})$

Del Teorema de Kolesov, se sigue que existen $\tilde{U}_1, U_1 \in \mathbf{E}$ tales que:

$$\underline{U} \leq \tilde{U}_1 \leq \overline{U},\ \underline{U} \leq U_1 \leq \overline{U} \text{ en } \overline{\Omega} \times [0, \infty),$$

$$\begin{cases} L_1[\tilde{U}_1] &= -a\tilde{U}_1 - c_1G(\underline{V})\tilde{U}_1 + q_1 \\ L_1[U_1] &= -aU_1 - c_1G(\overline{V})U_1 + q_1 \end{cases} \tag{1}$$

Ahora,

$$L_1[\tilde{U}_1 - U_1] \geq -a(\tilde{U}_1 - U_1) - c_1G(\underline{V})(\tilde{U}_1 - U_1) \text{ en } \Omega \times (0, T_1)$$

De donde,
$L_1 + (a + c_1G(V))\}(\tilde{U}_1 - U_1) \geq 0$ en $\Omega \times (0, T_1)$, y $\tilde{U}_1 - U_1 = 0$ en $\partial\Omega \times [0, \infty)$.

Del principio del Máximo (ver [Pw, pag. 173]), $\tilde{U}_1 \geq U_1$ en $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$.

Definamos ahora las siguientes funciones:

$$f_3(x, t, V) = -bV + c_2G(\overline{V})\tilde{U}_1 + q_2\ ,\ f_4(x, t, V) = -bV + c_2G(\underline{V})\underline{U} + q_2$$

Por hipótesis obtenemos que:

$$L_2[\overline{V}] \geq f_3(x, t, \overline{V})$$

$$L_2[\underline{V}] \leq f_3(x, t, \underline{V})$$

$$L_2[\overline{V}] \geq f_4(x, t, \overline{V})$$

$$L_2[\underline{V}] \leq f_4(x, t, \underline{V})$$

De nuevo por el Teorema de Kolesov, existen funciones $\tilde{U}_2, U_2 \in \mathbf{E}$ tales que:

$$\underline{V} \leq \tilde{U}_2 \leq \overline{V},\ \underline{V} \leq U_2 \leq \overline{V} \text{ en } \overline{\Omega} \times [0, \infty)$$

$$\begin{cases} L_2[\tilde{U}_2] &= -b\tilde{U}_2 + c_2G(\overline{V})\tilde{U}_1 + q_2, \\ L_2[U_2] &= -bU_2 + c_2G(\underline{V})\underline{U}^{\cdot} + q_2, \end{cases} \tag{2}$$

Más aún, $\tilde{U}_2 \geq U_2$ en $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$.

Por lo tanto (1) y (2) obtenemos que $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$ y (U_1, U_2) son supersoluciones y subsoluciones T–periódicas de los problemas $(R - D)$ y $(R - D)^*$.

Una observación importante al teorema anterior es que nos permite obtener los mismos resultados de [Q1] adoptando una definicón menos restrictiva (sin periocidad) de supersoluciones y subsoluciones de $(R - D)$. En efecto, es suficinete tomar como definición a funciones que satisfagan las hipótesis del teorema anterior.

Teorema de Existencia.

4.1 Observación. Antes de enunciar el teorema de existencia es necesario hacer algunas construcciones adicionales.

Sean ϕ y λ la primera función propia positiva y el primer valor propio del problema elíptico con valores de frontera:

$$\begin{cases} -\overline{L}_1[\phi] + a\phi + c_1G(b)\phi &= \lambda\phi \quad \text{en } \Omega, \\ \phi &\equiv 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \\ \phi &> 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Escojamos números reales $\overline{\alpha} > 1$ y $\rho > 0$ tales que si $q_1 > 0$ en $\overline{\Omega}$. Entonces

$$\begin{aligned} (\overline{\alpha}/2)q_1 &> \rho e^{\overline{\alpha}T_1}(\lambda - a - c_1G(b))||\phi||_\infty \\ (1/2)q_1 &> \rho e^{\overline{\alpha}T_1}||\phi||_\infty \\ q_1 &> \rho e^{\overline{\alpha}T_1}(\lambda + \overline{\alpha})||\phi||_\infty \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, sea $\overline{U}_1 \in E$ la solución del problema lineal periódico

$$\begin{cases} L_1[U] &= \overline{\alpha}q_1 \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ U &\geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty) \end{cases} \tag{5}$$

La existencia de las funciones $\phi, \overline{U}_1$ y el escalar λ se puede consultar en [Sm] o [Or].

4.2 Teorema. Si $q_1 > 0$ en $\overline{\Omega}$. Entonces el problema $(R - D)^*$ posee al menos una solución no trivial (U_0, V_0), con $U_0, V_0 \in E$.

Demostración. De la observación 4.1., existen funciones $\overline{U}_1, \phi$ y escalares $\overline{\alpha}, \rho$ que satisfacen (3), (4) y (5). Escojamos $c_2 > 0$ tal que:

$$b \geq c_2 ||\overline{U}_1||_\infty \int_\Omega g(x,s)ds$$

Definamos ahora las siguientes funciones

$$\underline{U}_1 = \rho e^{\overline{\alpha}t}\ \phi,\ \underline{U}_2 \equiv 0,\ \overline{U}_2 \equiv b$$

Vamos a demostrar que las funciones $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2$ satisfacen las hipótesis del teorema 3.2.

primero observemos que $\overline{U}_1 \geq \underline{U}_1$ en $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$. En efecto,

$$\begin{aligned} L_1[\overline{U}_1 - \underline{U}_1] &= \overline{\alpha q}_1 - (\overline{\alpha \rho} e^{\overline{\alpha}t} \overline{L}_1[\phi]) \\ &\geq \overline{\alpha}(\tfrac{1}{2}q_1 - \rho e^{\alpha T_1}\phi) + \tfrac{\overline{\alpha}}{2}q_1 - \rho e^{\alpha T_1}||\phi||_\infty(\lambda - a - c_1 G(b)) \\ &\geq 0 \text{ en } \Omega \times [0, T_1] \end{aligned}$$

Además $\overline{U} - \underline{U} = 0$ en $\partial\Omega \times [0, \infty)$. Del principio del máximo y la periodicidad del $\overline{U}_1$ y $\underline{U}_1$ obtenemos que:

$$\overline{U}_1 \geq \underline{U}_1 \text{ en } \overline{\Omega} \times [0, \infty)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} L_1[\overline{U}_1] + a\overline{U}_1 + c_1 G(\underline{U}_2)\overline{U}_1 - q_1 &\geq \overline{\alpha} q_1 - q_1 > 0 \text{ en } \Omega \times (0, \infty) \\ L_1[\underline{U}_1] + a\underline{U}_1 + c_1 G(\overline{U}_2)\underline{U}_1 - q_1 &= L_1[\rho e^{\overline{\alpha t}}\phi] + c_1\rho e^{\overline{\alpha}t}G(b)\phi - q_1 \\ &= \rho e^{\overline{\alpha}t}(\overline{\alpha} + \lambda)\phi - q_1 \\ &\leq 0 \text{ en } \Omega \times [0, T_1] \end{aligned}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} L_2[\overline{U}_2] + b\overline{U}_2 - c_2 G(\overline{U}_2)\overline{U}_1 &= b^2 - c_2 G(\overline{U}_2)\overline{U}_1 \\ &\geq b(b - c_2 G(b)||\overline{U}_1||_\infty) \\ &\geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, \infty), \\ L_2\underline{U}_2 + b\underline{U}_2 - c_2 G(\underline{U}_2)\underline{U}_1 &= 0 \text{ en } \Omega \times (0, \infty) \end{aligned}$$

De la definición de las funciones $\overline{U}_i$ y $\overline{U}_i$ $(i = 1, 2)$ se sigue que:

$$\overline{U}_i(x, 0) = \overline{U}_i(x, T), \underline{U}_i(x, 0) \leq \underline{U}_i(x, T), x \in \overline{\Omega}(i = 1, 2)$$

$$\overline{U}_i \geq 0, \underline{U}_i \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0, T_1],$$

$$\overline{U}_i \geq \underline{U}_i \geq 0 \text{ en } \overline{\Omega} \times [0, T_1]$$

Del teorema 3.1 existen funciones $\tilde{U}_i, U_i \in E$ tales que las parejas $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$ y (U_1, U_2) son supersoluciones y subsoluciones de $(R - D)^*$ respectivamente, y por lo tanto el teorema 2.3 en $[Q1]$ garantiza la existencia de una solución T–periódica no trivial (U_0, V_0), con $U_0, V_0 E$, del problema $(R - D)^*$.

Referencias

[Ko] Kolesov J. U. "A Test for the Existence of Periodic Solutions to Parabolic Equations" Soviet Math. Dokl, 7 (1966).

[La] Lazer A. C. "Some Remarks on Periodic Solutions of Parabolic Differential Equations". Dynamical Systems II. Academic Press Inc. (1980).

[Pa] Pao C. V. "On Nonlinear Reaction–Diffusion Systems" Journal of Math. Analysis and Applications. 87. (1982).

[Pw] Protter M. and Weinberger H. "Maximum Principles in Differential Equations". Prentice–Hall, Englewood, N.Y. (1967).

[Q1] Quintero J. R. "Soluciones Periódicas de un Sistema de Reacción–Difusión Correspondiente a un Modelo de Epidemias" Rev. Lecturas Matemáticas. Vol. 8. (1987).

[Q2] Quintero J. R. "Un Resultado sobre la Existencia de Soluciones Periódicas Para un Sistema de Reacción-Difusión Generalizado." 1992. (En preparación).

[Sm] Smulev I. "Periodic Solutions of the First Boundary Problem for Parabolic Equations" Amer. Math. Soc. Translations. Section 2. Vol. 79. (1969).

[Or] Ortega L. "Notas Sobre Ecuaciones Diferenciales Parciales". Seminario de Análisis. Universidad del Valle. (1986).