



Talbot Non-linear Effect for a Bidimensional Network of Comparable Period to the Wavelength

Emiro Arrieta Jiménez
Universidad de Córdoba

Daladier Blanco Ávila
Universidad de Córdoba

Cesar Torres Moreno
Universidad Popular
del Cesar

Received: November 9, 2015

Accepted: March 16, 2016

Pag. 43-60

Abstract

The Talbot effect is a diffractive phenomenon located in the Gaussian optic field, but when the wavelength is comparable to the object period, it is considered that this effect enters in its nonlinear regime. Using a monochromatic plane wave, in this contribution, we show analytically the respective Z-Talbot and a simulation to locate two self-images between 0 and 10 microns generated by a two dimensional grating made with hole array films of Au with periodicity $1,9\lambda$, which have been reported experimentally in a recent article.

Keywords: Z-Talbot, gratings, monochromatic plane wave.

Efecto Talbot no lineal para una red bidimensional de periodo comparable a la longitud de onda

Resumen

El efecto Talbot es un fenómeno difractivo ubicado desde su origen en la óptica Gaussiana, pero cuando la longitud de onda es comparable con el período del objeto se considera que este efecto entra en su régimen no lineal. En esta contribución, usando una onda plana monocromática, mostraremos analíticamente el Z-Talbot respectivo y una simulación para ubicar dos de las autoimágenes entre 0 y 10 μm generadas por una red de agujero bidimensional fabricada en película de Au con período de $1,9\lambda$, que han sido reportadas de manera experimental en un artículo reciente.

Palabras clave: Z-Talbot, red, onda plana monocromática.

1 Introduction

En 1836, H. Fox Talbot fue el primero en observar la periodicidad longitudinal del campo electromagnético difractado por una red de difracción en la dirección de propagación, es decir, obtuvo réplicas de esta red. Esta señal genera además otros patrones denominados imágenes Talbot fraccionales, en las que la distribución

de amplitud es una versión del objeto periódico de partida con la misma celda unidad aunque con un período menor. Este último fenómeno es conocido como efecto Talbot fraccional. Por otro lado, Rayleigh demostró que la periodicidad longitudinal del campo difractado por una red de Ronchi a $z = m \frac{d^2}{\lambda}$ (donde d es el período espacial de la red y m un entero par) producen patrones que reproducen la entrada [1]. También se tiene que, el efecto Talbot exhibe autoimagen cuando una rejilla se ilumina con una onda plana de alta coherencia espacial. Auto imágenes de la rejilla son producidas en ciertos planos detrás y en frente de la rejilla. Estas imágenes son producidas solamente por propagación en espacio libre de un campo óptico difractado [2]. En el régimen metaxial a frecuencias ópticas, se puede usar el efecto Talbot para observar anomalías en objetos periódicos (o cuasi periódicos) que se veían perfectos en el régimen paraxial, es decir logrando “superresolución” a esta escala (cuando el periodo del objeto periódico o cuasi periódico es menor o igual que 10 veces la longitud de la onda usada), en este caso, la posición de las autoimágenes no corresponde con la de la distancia Talbot paraxial [3]. El efecto Talbot es uno de los fenómenos básicos de difracción en sistemas Gaussianos. Recientemente, imágenes Talbot producidas por un objeto periódico en un medio no homogéneo se describen teóricamente. Uno de los medios naturales en las que estas imágenes pueden ser estudiadas es en una convencional microlentes de gradiente de índice (GRIN), dando así una idea de este efecto a escala micrométrica [4]. El efecto Talbot, también se ha usado en el estudio del régimen cromático y aplicación a la espectrometría [5], aberraciones de las autoimágenes en el régimen pos paraxial [6], en el estudio de ondas plasmonicas [7, 9] y cristales fotonicos no lineales [10], generación de conjunto de vórtices ópticos con el efecto Talbot fraccional [11], últimamente con red de volumen en cristales fotorrefractivos [12, 13], y holografía digital [14], entre otros. Por todo este gran volumen de aplicaciones que presenta este fenómeno y por el poco estudio que se ha realizado sobre este efecto a nivel no lineal con rejillas de difracción bidimensional de período comparable a las longitudes de onda a frecuencias ópticas, donde hasta el momento no se ha evidenciado de manera explícita una formula cuantitativa que dé cuenta de la ubicación de las autoimágenes como existe en el caso clásico (o paraxial), nosotros presentamos en este artículo, un estudio teórico de este fenómeno a escala bidimensional, de lo cual derivaremos el Z-Talbot respectivo, para lograr la ubicación de dos de las autoimagen reportadas experimental en la referencia 3 sin justificación analítica, usando una red de Au bidimensional de período $1,9\lambda$ y una onda plana monocromática coherente de $\lambda = 633$ nm.

2 Efecto Talbot no lineal

La teoría de las ondas escalar se utiliza tradicionalmente para el efecto Talbot en el límite paraxial, donde el patrón de luz de una matriz de agujero periódico en $z = 0$ (la estructura inicial) puede ser representado por una onda escalar Ψ y expandida en Fourier como una suma de ondas planas en la dirección de propagación de la luz $z > 0$ [3] así :

$$\Psi(r, \lambda_{eff}) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} A_{m_1 m_2}(\omega) \exp(i k_x^{m_1} x + i k_y^{m_2} y + i k_z^{m_1, m_2} z) \quad (1)$$

donde $r = (x, y, z)$ es la posición espacial, $\lambda_{eff} = \lambda/n$ es la longitud de onda efectiva en el medio con un índice de refracción n , y $A_{m_1 m_2}(\omega) = \frac{1}{a_0^2} \int_0^{a_0} \int_0^{a_0} \Psi(x, y, 0, \omega) \exp[-2\pi(m_1 x + m_2 y)/a_0] dx dy$, es la amplitud compleja de la onda plana, donde a_0 es el período del objeto propuesto, y m_1, m_2 números enteros.

El vector de onda $k = (k_x^{m_1}, k_y^{m_2}, k_z^{m_1, m_2}) = (2\pi m_1/a_0, 2\pi m_2/a_0, k_z^{m_1, m_2})$ satisface lo siguiente $|k| = 2\pi/\lambda_{eff}$ y $k_z^{m_1, m_2} > 0$. En el límite paraxial donde $a_0 \gg \lambda_{eff}$, y expandiendo en Taylor para k_z resulta:

$$k_z^{m_1, m_2} = (|k|^2 - k_x^{m_1^2} - k_y^{m_2^2}) \approx 2\pi [1 - (m_1^2 + m_2^2)\lambda_{eff}^2/2a_0^2] / \lambda_{eff} \quad (2)$$

Si esta aproximación se aplica a la ecuación (1), se puede derivar la siguiente relación:

$$\Psi(x, y, z + s z_T, \lambda_{eff}) = \exp[i2\pi s z_T / \lambda_{eff}] \Psi(x, y, z, \lambda_{eff}) \quad (3)$$

donde $z_T = 2a_0^2/\lambda_{eff}$ es la distancia Talbot paraxial y s es un número entero. Por lo tanto, auto-imágenes exactas serán observadas a múltiplos enteros de z_T por qué las intensidades satisfacen,

$$I(x, y, z + s z_T, \lambda_{eff}) = I(x, y, z, \lambda_{eff}) = |\Psi(x, y, z, \lambda_{eff})|^2$$

Más allá del límite paraxial, sin embargo, cuando a_0/λ_{eff} se aproxima a la unidad, el desarrollo de Taylor en la ecuación (2) no es válido. Los patrones de luz todavía se pueden calcular con base a la suma de ondas planas, pero la aproximación a cerca de k_z ya no puede ser utilizada. Para calcular el cambio de fase exacto de las ondas planas que se propagan (con $\exp(izk_z)$ en término de la ecuación (1)), consideramos, más allá del límite paraxial, k_z independientemente para cada plano de onda (m_1, m_2) . Cuando, k_z es imaginario, tenemos las ondas evanescentes con $k_x^2 + k_y^2 > (2\pi/\lambda_{eff})^2$. Por lo tanto, se simplifica el cálculo de patrones de luz en el campo lejano al desprestigiar las ondas evanescentes por su decaimiento exponencial. Por consiguiente, sólo las ondas planas que se propagan, representadas gráficamente como puntos de coordenadas (m_1, m_2) dentro del círculo con un radio de a_0/λ_{eff} y k espacial, son consideradas.

La condición para lograr auto-imágenes exactas requiere que todas las ondas planas estén en fase a la misma distancia. Si la frecuencia central $(0, 0, k_z^{0,0})$ se elige como la referencia, esta condición se puede escribir como:

$$\exp[ik_z^{0,0} z_T] = \exp[ik_z^{m_1, m_2} z_T] \quad (4)$$

Para toda onda de propagación (m_1, m_2) , donde z_T es la distancia de la autoimagen. Debido a que los cuatro vecinos más cercanos tienen la misma componente k_z , la distancia de la auto-imagen puede ser derivada fácilmente de la ecuación (4):

$$z_T = \lambda_{eff} / \left(1 - \sqrt{1 - (\lambda_{eff}/a_0)^2} \right) \quad (5)$$

La ecuación (5), representa la distancia Talbot del régimen no lineal de Lord Rayleigh [17]. El aumento de a_0/λ_{eff} resulta en un incremento del número de ondas planas que se necesita considerar en la ecuación (1). Usando las mismas condiciones para la auto-imagen y tomando una componente arbitraria de onda plana con frecuencia $k_z^{n_1, n_2}$ como referencia en la ecuación (4), se obtiene la expresión más general para las distancias Talbot,

$$z_T = \lambda C_{(n_1 n_2)(m_1, m_2)} / \left(\sqrt{1 - (\lambda/a_0)^2 (n_1^2 + n_2^2)} - \sqrt{1 - (\lambda/a_0)^2 (m_1^2 + m_2^2)} \right) \quad (6)$$

o para auto-imagen desfasadas en π ,

$$z_T = \lambda \left(s + \frac{1}{2} \right) C_{(n_1 n_2)(m_1, m_2)} / \left(\sqrt{1 - (\lambda/a_0)^2 (n_1^2 + n_2^2)} - \sqrt{1 - (\lambda/a_0)^2 (m_1^2 + m_2^2)} \right) \quad (7)$$

donde $C_{(n_1 n_2)(m_1, m_2)}$ y s son números enteros.

3 Resultados y discusiones

En este caso bidimensional(2D), usando una red de oro(Au) con $a_0 = 1,2\mu m$ y una onda plana de $\lambda = 633nm$, como la usada en la referencia 3. El máximo número de ondas propagantes, acorde a los valores de a_0 y λ es $n \leq a_0/\lambda_{eff}$, que en este caso corresponden a los ocho primeros vecinos cercanos a (0,0) así, de la ecuación (2) se infiere la siguiente relación $m_1^2 + m_2^2 \leq (a_0/\lambda_{eff})^2$, la cual representa la condición básica para escoger las componentes (n_1, n_2) de ondas planas propagantes que intervienen en la formación de las autoimágenes de esta red de agujeros, que en este caso son: (0,0), (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (1,1), (-1,-1), (1,-1), y (-1,1), donde podemos notar que los cuatro vecinos más cercanos tienen la misma frecuencia espacial en magnitud. Utilizando estas ocho ondas propagantes y la relación de la ecuación (6), hallamos las siguientes distancias Talbot presentadas en la tabla 1.

Tabla 1. *Calculo de las distancias Talbot, usando la ec (4) para la red de Au con periodo de 1,2 μm y $\lambda=0,633 \mu m$.*

Componentes referente de ondas planas	Valor del coeficiente(C) del Z-Talbot	Distancias Talbot en μm
(0,0) y (1,0)	1	4,2
(0,0) y (1,1)	1	1,9
(1,0) y (1,1)	1	3,5
(0,0) y (1,1)	2	3,8
(1,0) y (1,1)	2	7
(0,0) y (1,1)	5	9,5

Cuadro 1: *Calculo de las distancias Talbot, usando la ec (4) para la red de Au con periodo de 1,2 μm y $\lambda = 0,633 \mu m$.*

Observando los resultados reportados en esta tabla, podemos notar que los valores experimentales reportados en la referencia 3 para la ubicación de las tres autoimágenes de la red de Au de 0 – 10 μm axialmente (4 μm , 7, 1 μm y 9, 6 μm), las podemos obtener con nuestros datos teóricos, usando por ejemplo, para la primera

posición, el promedio de las distancias Talbot de la fila 1 y 4; la segunda y tercera posición las ubicamos aproximadamente con las distancias Talbot presentadas en la fila 5 y 6 respectivamente. También, podemos notar que en la formación y ubicación posicional de estas autoimágenes predominan en la fórmula, los componentes de ondas planas de mayor frecuencia espacial y, en especial, en las dos últimas autoimágenes.

Asumiendo que la anchura de los agujeros de la red de Au, w ; es $w \ll a_0$ que implica que todos los coeficientes A_{m_1, m_2} de la serie son iguales, cuando se muestran los patrones de intensidad respectivos en la dirección z , usando la ecuación (1), operando las sumatorias entre -1 y 1 con la participación de los ocho primeros vecinos de ondas planas propagantes, tenemos las siguientes autoimágenes del objeto de amplitud original.

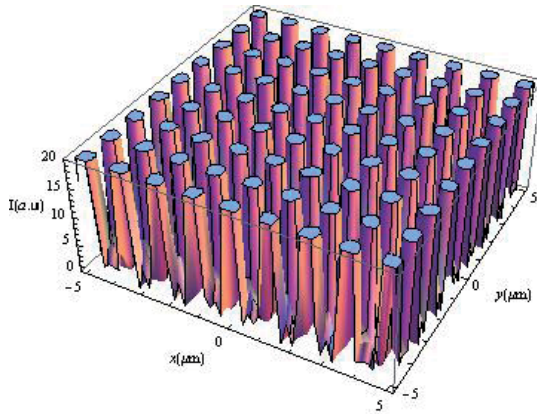


Figura 1: *Objeto en $z = 0 \mu\text{m}$.*

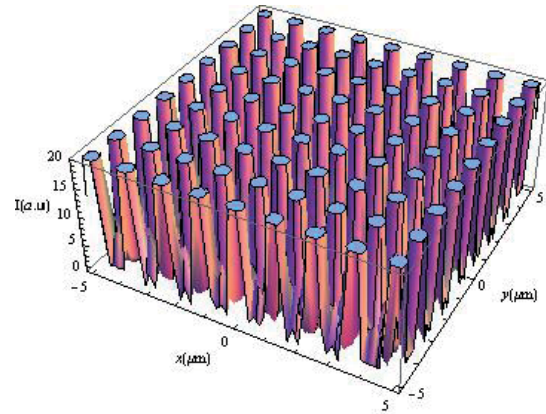


Figura 2: *Autoimagen a $z = 4 \mu\text{m}$.*

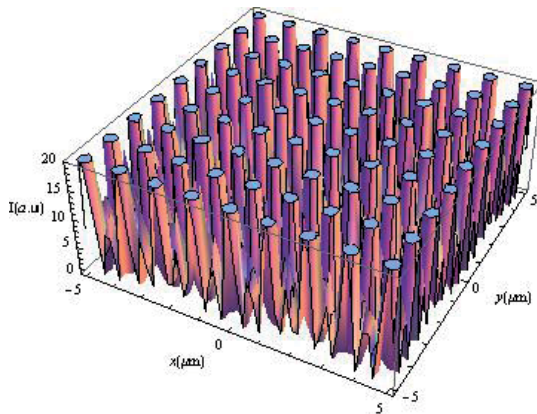


Figura 3: *Autoimagen a $z = 7,1 \mu\text{m}$.*

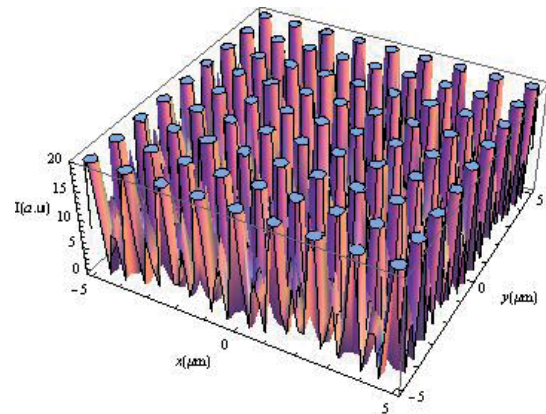


Figura 4: *Autoimagen a $z = 9,6 \mu\text{m}$.*

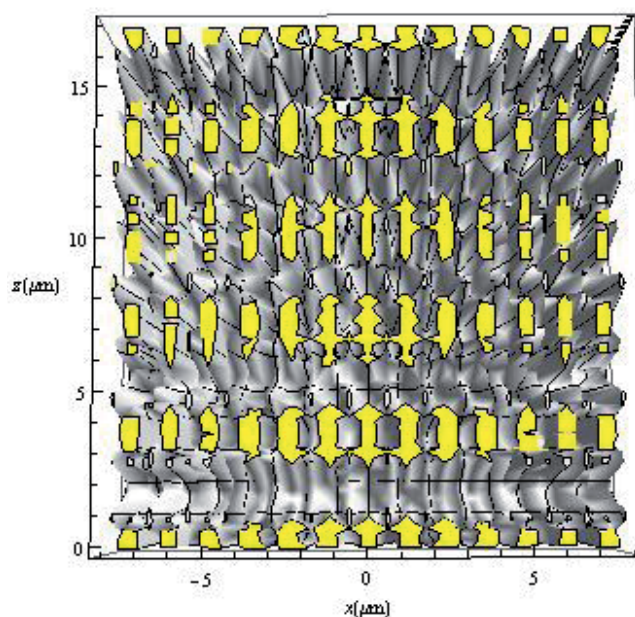


Figura 5: Autoimágenes entre 0 y $17\mu\text{m}$ para la red 2D de periodo $a_0 = 1,2\mu\text{m}$, obtenidas a partir de la teoría escalar de la difracción con ondas planas en representación del espectro angular con $\lambda_{eff}=633\text{nm}$

Al comparar las imágenes mostradas en las figuras 2, 3 y 4 con la del objeto original (Figura 1), vemos que en las posiciones mostradas para z se forman verdaderas autoimágenes, aunque la mostrada en la Figura 4 tiene menor contraste, tal como lo muestran los resultados experimentales de la Figura 6F, ubicada en la tercera autoimagen en el eje z a partir de la matriz de agujeros y que también se observa en la Figura 5 calculada con el modelo teórico tratado anteriormente. En esta Figura 5 podemos notar que más allá de $10\mu\text{m}$ aparecen otras autoimágenes que no conservan su periodicidad axial tal como ocurrió en las tres anteriores. En la Figura 6 vemos que la formación de estas autoimágenes se consiguen usando el cálculo de los patrones de luz con onda escalar (Figura 6D) y mediante una simulación con el método de diferencia finita en el dominio temporal (FDTD) como lo muestra la Figura 6H [3].

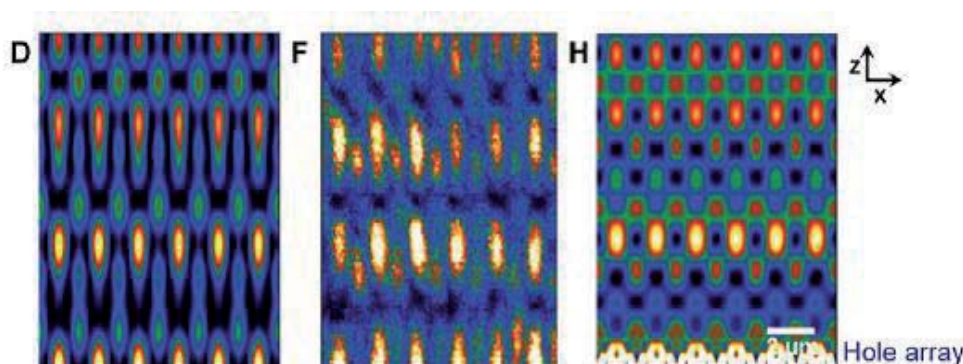


Figura 6: Las distancias de las Auto-imágenes del efecto Talbot no paraxial son diferentes de las distancias Talbot clásicas. Cálculos de patrones de luz de onda escalares con a_0/λ_{eff} , donde $a_0 = 1,2\mu\text{m}$ y $\lambda_{eff} = 633\text{nm}$ (Fig.5D). Medidas experimentales con $a_0/\lambda_{eff} = 1,9$ (Fig.5F). Patrones de luz a partir de simulaciones FDTD con $a_0/\lambda_{eff} = 1,9$ (Ver Fig.5H) [3].

4 Conclusiones

Comparando los resultados experimentales y teóricos anotados en esta contribución, podemos concluir que la teoría escalar de la difracción para campos difractados por red de Au con período de $1,9 \lambda$ (alta densidad) usando ondas planas monocromáticas coherentes, funciona muy bien para describir el fenómeno Talbot a nivel no lineal, como también lo avalan los resultados mostrados en el artículo de la referencia 17, utilizando rejillas metálicas unidimensionales de período 2λ y 4λ . También, anotamos que uno de los aportes novedosos de este artículo, es el primer reporte en este fenómeno en el régimen no lineal, de las distancias Talbot para redes bidimensionales de períodos comparables a la longitud de la onda incidente. Finalmente, los estudios de estos objetos difractivos con este tipo de períodos, son de especial importancia, principalmente por el extenso volumen de aplicaciones que presentan, como por ejemplo, el gran poder de resolución que ofrece frente al uso como analizador de espectros atómicos, en multiplexados ópticos, entre otros, los culés vemos que por medio de este fenómeno Talbot, los podemos caracterizar en el laboratorio para sus respectivos buenos usos a esta escala.

Agradecimiento

Agradecemos al Dr. Nestor Bolognini por su valiosa colaboración en este trabajo, bajo asesorías brindadas al estudiante de VII semestre del doctorado en Ciencias Físicas del SUE - Caribe, Emiro Arrieta Jiménez, durante una instancia de pasantía en el CIOp de La Plata, Argentina, entre julio y agosto de 2015.

Referencias

- [1] Arrieta., E. S. y Torres, C. O. (2015). “Relación entre la distancia Talbot y el orden de la transformada fraccional de Fourier en medio GRIN”, Revista Investigaciones Aplicadas, 9(1):25-29.
- [2] Smolyaninov, I. and Davis, C. (1998). “Apparent Superresolution in Near-field Optical Imaging of Periodic Gratings”, Optics letters, 23(17): 1346-1347.
- [3] Hua, Yi., Jae Yong Suh, Wei Zhou, Mark D. Huntington and Teri W. Odom (2012). “Talbot Effect Beyond the Paraxial Limit at Optical Frequencies”, Optics express, 20(13):14284-14291.
- [4] Flores-Arias, M. T., Bao, C., Pérez, M. V. and Fernández-Pousa, C. R. (2002). “Fractional Talbot Effect in a Selfoc Gradient-index Lens”, Optics Letters. 27(23): 2064-2066.
- [5] Guérineun, N., Di Mambro, E. and Primot, J. (2003). “Talbot Experiment Re-examined: Study of the Chromatic Regime and Application to Spectrometry”, Optics Express, 11 (24):3310-3318.
- [6] Ring, J. D., Lindberg, J., Howls, C. J. and Dennis, M. R. (2012). “Aberration-like Cusped Focusing in the Post-paraxial Talbot Effect”, arXiv: 1204.5994 v1, Physics Optics.

- [7] Dennis, M. R., Zheludev, N. I. and García de Abajo, F. J. (2007). “The Plasmon Talbot Effect”, *Optics Express*, 15(15):9692-9700.
- [8] Zhang, W., Zhao, C., Wang, J., and Zhang, J. (2009). “An Experimental Study of the Plasmonic Talbot Effect”, *Optics Express*, 17(22):19757-19762.
- [9] Cherukulappurath, S., Heinis, D., Cesario, J., van Hulst, N.F., Enoch, S., and Quidant, R. (2009). “Local Observation of Plasmon Focusing in Talbot Carpets”, *Optics Express*, 17(26):23772-23784.
- [10] Zhang, Y., Wen, J., Zhu S. N. and Xiao, M. (2010). “Nonlinear Talbot Effect”, *Physical Review Letters*, 104(18):3901 -3904.
- [11] Wei, Gong X, Lu Lei L. and Guo Cheng S. (2009). “ Generation of Optical Vortex Array Based on the Fractional Talbot Effect”, *Optics Communications*, 282: 2665-2669.
- [12] Forte, G., Lencina, A., Tebaldi, M., and Bolognini, N. (2011). “Self-imaging by a Volume Grating”, *Optics Communications*, 284:2494-2499.
- [13] Forte, G., Lencina, A., Tebaldi, M. and Bolognini, N. (2011). “Talbot effect by a photorefractive volume phase grating”, *Applied optics*, 51(4):479-485.
- [14] Martínez, L., Araiza, E.M., Javidi, B., Andrés, P., Climent, V., Lancis, J. and Tajahuerce, E. (2009). “Single-shot Digital Holography by Use of the Fractional Talbot Effect”, *Optics Express*, 17(15):12900-12908.
- [15] Bozhevolnyi, S.I., Xiao M. and Keller. O. (1994). “External-reflection Near-field Optical Microscope with Cross-polarized Detection”, *Applied Optics*, 33(5):876-880.
- [16] Rayleigh, L. (1880). “On Copying Diffraction-Gratings and on Some Phenomena Connected Therewith”, *Philos.Mag*, 11(67):196-205.
- [17] Shuyun, T., Yugui, T., and Chuanfu, C. (2008). “Quasi-Talbot Effect of the High-density Grating in Near Field”, *J.Opt.Soc.Am.A*, 25(12):2945-2951.

Dirección de los autores

Emiro Arrieta Jiménez

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Córdoba, Montería - Colombia
earrieta@correo.unicordoba.edu.co

Daladier Blanco Ávila

Estudiante, Programa de Física, Universidad de Córdoba, Montería - Colombia
deba-09@hotmail.com

Cesar Torres Moreno

Grupo LOI, Universidad Popular del Cesar, Valledupar - Colombia
cesartorres@unicesar.edu.co