Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

REVISTA DE CIENCIAS

Length for Univalent Functions, a Simpler Proof

Alexander Arévalo S.
Institución Universitaria
Antonio José Camacho

Diana C. Giraldo M.
Universidad Autónoma
de Occidente

Received: June 18, 2015 Accepted: August 23, 2015

Pag. 63-68

Abstract

We will present a proof of the arc length, the image of the circumference $|z| = r$ applying the Koebe function defined by Yamashita in [4].

Keywords: Univalent functions, isopherimetric inequality, Koebe function, arc length.

Longitud máxima para funciones univalentes, una prueba más sencilla

Resumen

Presentaremos una prueba de la longitud de arco, de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ aplicando la función de Koebe definida por Yamashita en [4].

Palabras y frases clave: Funciones univalentes, desigualdad isoperimétrica, Función de Koebe, longitud de arco.

1 Introducción

La teoría de las funciones univalentes se inicia alrededor del año 1900 y actualmente sigue siendo un campo activo en la investigación. Muchos resultados en este campo, se formulan como problemas extremales, como lo es el problema que planteamos en este documento, entre otros, tales como: maximizar el módulo de los coeficientes de Taylor, áreas, longitudes y medias integrales asociadas con las funciones univalentes.

Este documento está dedicado a presentar una prueba de un problema extremal conocido en las funciones univalentes, concretamente estimar la longitud de arco de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ bajo la aplicación de la función de Koebe.

En este artículo se hará una estimación de esta longitud de arco, mostrando que es la mejor que se ha podido calcular para la función de Koebe y que el valor exacto de la longitud para esta función, aún no se ha podido calcular con exactitud.

En este artículo se presentará una prueba asequible a los lectores que el mismo resultado realizado por Yamashita [4].

Definición 1: Una función f analítica en un dominio D del plano complejo $\mathbb{C}$, se dice **univalente** en D, si $f(z_1) \neq f(z_2)$ para todo par de puntos $z_1, z_2 \in D$, con $z_1 \neq z_2$.

Definición 2: La clase de funciones $\mathcal{S}$ está formada por la funciones analíticas y univalentes en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Cada $f \in \mathcal{S}$ tiene una expansión en serie de Taylor de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \qquad |z| < 1.$$

Algunos ejemplos de estas funciones son:

- La identidad, $f(z) = z$.
- $l(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots = z(1-z)^{-1}$.
- La función de Koebe,

$$k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = z(1-z)^{-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

la cual envía el disco $\mathbb{D}$ sobre el plano entero menos la parte del eje real negativo de $-\frac{1}{4}$ al infinito, juega un papel importante como función extremal en nuestro trabajo y en una gran cantidad de problemas extremales en la clase $\mathcal{S}$.

Desigualdad Isoperimétrica

Sea C una curva de Jordan rectificable con longitud L, acotando un dominio con área A, entonces se cumple que

$$4\pi A \leq L^2.$$

Dada la función analítica $f \in \mathbb{D}$, se calcula la longitud de arco $L_r(f)$ de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ bajo la aplicación $f \in \mathcal{S}$, como

$$L_r(f) = r \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Teorema 1: Para toda $f \in \mathcal{S}$,

$$L_r(f) \leq \frac{2\pi r}{(1-r)^2},$$

con $0 \leq r < 1$. Ver [2].

2 Teorema principal

Teorema 2: La longitud de arco, $L_r(k)$ de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ bajo la aplicación de Koebe cumple que

$$L_r(k) \geq \frac{2\pi r\sqrt{r^4 + 4r^2 + 1}}{(1 - r^2)^2},$$

donde $0 < r < 1$.

Demostración:

Para toda función f analítica en el disco $\mathbb{D}$, se cumple

$$A_r(f) = \iint_{D(0,r)} |f'(z)|^2 \; dA(z). \tag{1}$$

Donde $A_r(f)$ es el área de la imagen de la circunferencia de radio r.

Como $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se tiene

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &= f'(z)\overline{f'(z)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \; r^m \; e^{im\theta}. \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n \; r^n \; e^{-in\theta} \\ &= \sum_{m,n} a_m \overline{a}_n \; r^{m+n} \; e^{i(m-n)\theta}. \end{aligned}$$

Así, reemplazando en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} A_r(f) &= \iint_{D(0,r)} \sum_{m,n} a_m \overline{a}_n \; r^{m+n} \; e^{i(m-n)\theta} \rho \; d\rho \; d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \sum_{m,n} a_m \overline{a}_n \; \rho^{m+n} \; e^{i(m-n)\theta} \rho \; d\rho \; d\theta \\ &= \sum_{m,n} a_m \overline{a}_n \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \; d\theta \; \int_0^{r} \rho^{m+n+1} \; d\rho \\ &= \sum_{n} |a_n|^2 \; \pi \; \frac{r^{2n+2}}{n+1}, \end{aligned}$$

así,

$$A_r(f) = \sum_{n} |a_n|^2 \; \pi \; \frac{r^{2n+2}}{n+1}. \tag{2}$$

Luego, con base en la desigualdad isoperimétrica y empleando (2), tenemos

$$\begin{aligned} L_r^2(f) &\geq 4\pi\ A_r(f) \\ &= 4\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{n+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que la función de Koebe esta dada por

$$k(z) = z(1-z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n+1}$$

Su derivada es

$$k'(z) = 1 + 4z + 9z^2 + \ldots = \frac{z+1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 z^n. \tag{4}$$

Tomando $a_n = (n+1)^2$ y reemplazándolo en (3), se tiene

$$\begin{aligned} L_r^2(k) &\geq 4\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^3\ r^{2n+2} \\ &= 4\pi^2 S_0(r), \end{aligned} \tag{5}$$

donde $S_0(r) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^3\ r^{2n+2}$.

Definimos $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^3 x^n$ y

$$S_0(r) = r^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^3(r^2)^n = r^2 S(r^2).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2(x^{n+1})' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\ x^{n+1}\right)' \\ &= \Gamma'(x), \end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\ x^{n+1} \\ &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ x^{n+1}\right)' \\ &= x\ k'(x), \end{aligned}$$

donde $k(x)$ es la función de Koebe y por [4] $\Gamma(x) = \dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ por (4).

Dado que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n\ x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ x^n \\ \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ x^{n+1} = k(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Derivando en (7) y teniendo en cuenta (6), se obtiene

$$\begin{aligned} S(x) &= \Gamma'(x) \\ &= x\ k''(x) + k'(x) \\ &= \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}, \end{aligned} \tag{8}$$

de manera que, usando (8) tenemos

$$S_0(r) = r^2 S(r^2) = r^2\ \Gamma'(r^2) = r^2 \left(\frac{r^4+4r^2+1}{(1-r^2)^4} \right).$$

Por lo tanto, de acuerdo a (5) y teniendo en cuenta el resultado anterior, se deduce

$$\begin{aligned} L_r^2(k) &\geq 4\pi^2\ S_0(r) \\ &= 4\pi^2\ r^2 \left(\frac{r^4+4r^2+1}{(1-r^2)^4} \right), \end{aligned}$$

obteniendo así, el resultado deseado para la función extremal de Koebe,

$$L_r(k) \geq \frac{2\pi\ r\ \sqrt{r^4+4r^2+1}}{(1-r^2)^2}.$$

Referencias bibliográficas

[1] Duren, P. L. (1964). An Arc Length Problem for Close to Convex Functions. *Journal London Mathematical Society*, *39*, 757-761.

[2] Duren, P. L. (1983). *Univalent functions.* Nueva York, USA: Springer-Verlag.

[3] De Branges, L. (1985). A Proof of the Bieberbach Conjecture. *Acta Math.*, *154*, 137-152.

[4] Yamashita, S. (1990). Area and Length Maxima for Univalent Functions, Bull. *Austral. Math. Soc.*, *41*, 435-439.

Dirección de los autores

Alexander Arévalo S.
Departamento de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Antonio José Camacho, Cali - Colombia
aarevalo@admon.uniajc.edu.co

Diana C. Giraldo M.
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Occidente,
Cali - Colombia
dcgiraldo@uao.edu.co