SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE VON BERTALANFFY

Jorge Rodríguez B.
Luis H. Romero N.
Ana María Sanabria R.
Departamento de Matemáticas.
Universidad del Valle. [1]

1 Introducción

En este artículo presentaremos las soluciones numéricas de la ecuación diferencial,

$$\frac{dw}{dt} = nw^d - kw^m, \quad w \geq 0, \qquad [\text{E. V}]$$

que proviene de los estudios fisiológicos sobre crecimiento y metabolismo planteados por Von Bertalanffy [1].

Cuando $d = 1$ o $m = 1$, la ecuación [E. V] es una ecuación diferencial de Bernoulli de fácil integración.

En el estudio sobre el crecimiento de especies biológicas marinas, cuando el crecimiento es isométrico, se considera la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = nw^{2/3} - kw, \quad w \geq 0.$$

Usando la sustitución $w = \ell^3$, se llega a la solución,

$$\ell = \frac{n}{k}(1 - e^{-k/3(t-t_o)})$$

conocida en Evaluación de Recursos Marinos [2].

[1] Cali. Col. A.A 25360

2 Relaciones Básicas

La ecuación diferencial [E. V] se puede expresar por separación de variables en la integral,

$$t(d,\ m,\ w) = \int_0^w \frac{1}{n\alpha^d - k\alpha^m} d\alpha.$$

Utilizando la ecuación funcional,

$$t(d,\ m,\ w) = st(sd - s + 1,\ sm - s + 1,\ w^{1/s}), \quad s > 0$$

se demuestran las siguientes relaciones:

$$(2.1) \qquad t(d,\ m,\ w) = \frac{1}{(m-1)} \int_{w^{1-m}}^{\infty} \frac{dz}{nz^{2-r} - k}$$

en la región:

$$R = \left\{ (d,\ m,\ w) : d < 1,\ m > 1,\ w < \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{(2-r)(m-1)}} \right\}$$

con $r = \dfrac{d+m-2}{m-1} < 1$, y

$$(2.2) \qquad t(d,\ m,\ w) = -\frac{1}{(d-1)} \int_{w^{1-d}}^{\infty} \frac{1}{kz^{2-r} - n}$$

en la región:

$$R = \left\{ (d,\ m,\ w) : d > 1,\ m > 1,\ w < \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{(2-r)(d-1)}} \right\} ,$$

con $r = \dfrac{d+m-2}{d-1} < 1$. Ver [3].

En la ecuación fisiológica de crecimiento [E.V], w es el peso del animal a la edad t, l la longitud lineal a la edad t, n y k son respectivamente las tasas de metabolismo y catabolismo, y d y m son parámetros inherentes al crecimiento de la especie [1].

3 Solución numérica

Para encontrar las soluciones numéricas de las integrales planteadas en (2.1) y (2.2), se realizó un programa SAS BERTA en lenguaje S.A.S., usando el método numérico de Simpson, el cual tiene como variables de entrada, d, m, k; y como salidas el conjunto $\{(t, w)\}$ que proporciona su solución y su representación gráfica.

Ejemplo

Dada la ecuación

$$\frac{dw}{dt} = 4w^{0.8} - 3w^{1.7}, \quad w \geq 0$$

donde, $n = 4$, $k = 3$, $d = 0.8$, $m = 1.7$. La solución y su representación gráfica están dadas por

OBS	W	T
1	0.05	0.64650
3	0.15	0.83163
4	0.20	0.89163
5	0.25	0.94305
6	0.30	0.98904
7	0.35	1.03141
8	0.40	1.07128
9	0.45	1.10948
10	0.50	1.14659
11	0.55	1.18314
12	0.60	1.21956
13	0.65	1.25630
14	0.70	1.29381
15	0.75	1.33262
16	0.80	1.37336
17	0.85	1.41681
18	0.90	1.46409
19	1.00	1.51671
20	1.05	1.57702
21	1.10	1.64869
22	1.15	1.73806
23	1.20	1.85697
24	1.25	2.03062
25	1.30	2.32398
26	1.35	2.97138

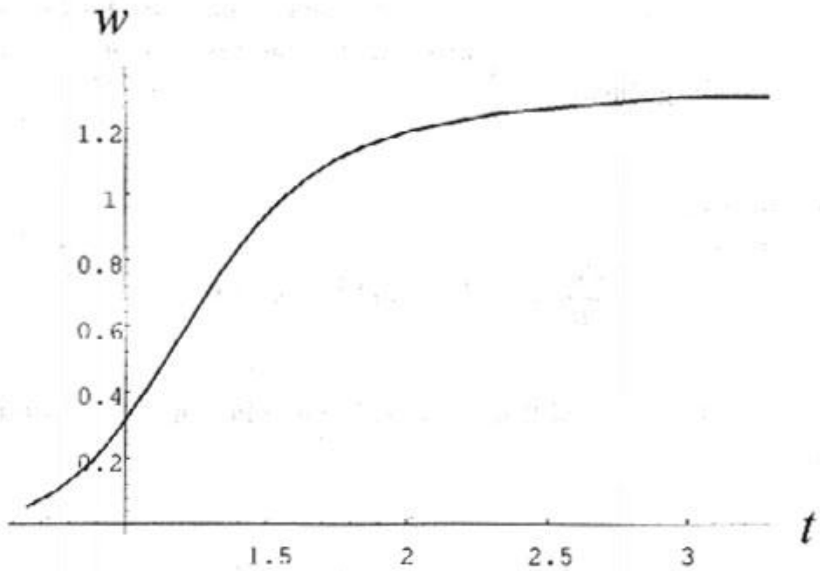

Figura 1. Solución gráfica de la ecuación diferencial

Listado del Programa SAS BERTA

```
input n1 k1 d m;
if d<1 and m>1 then go to ok;
if d>1 and m<1 then go to mm;
else return;
ok:r=(d+m-2)/(m-1);
w1=(n1/k1)**(1/((2-r)*(m-1)));
w2=.05**(1-m);
if d<1 and m>1 then go to kk;
mm:r=(d+m-2)/(d-1);
w1=(k1/n1)**(1/((2-r)*(d-1)));
w2=.05**(1-d);
kk:b=100000;
n2=int(w1/.05);
do i=1 to n2^-1 by 1;
if d<1 and m>1 then go to aa;
if d>1 and m<1 then go to bb;
aa:w2=(.05+(i-1)*.05)**(1-m);
w=w2**(1/(1-m));
if d<1 and m>1 then go to cc;
bb:w2=(.05+(i-1)*.05)**(1-d);
w=w2**(1/(1-d));
```

```
cc:n=b;
t=0;
k=2*n;
h=(b-w2)/(k);
if d<1 and m>1 then go to dd;
if d>1 and m<1 then go to ff;
dd:t=1/(n1*w2**(2-r)-k1)+1/(n1*b**(2-r)-k1);
if d<1 and m>1 then go to ee;
ff:t=1/(k1*w2**(2-r)-n1)+1/(k1*b**(2-r)-n1);
ee:do j=1 to k-1 by 2;
x=w2+(j)*h;
if d<1 and m>1 then go to hh;
if d>1 and m<1 then go to ii;
hh:t=t+4*1/(n1*x**(2-r)-k1);
if d<1 and m>1 then go to jj;
ii:t=t+4*1/(k1*x**(2-r)-n1);
jj:r1=j+1;
if r1=2*n then go to nn;
x=w2+(r1)*h;
if d<1 and m>1 then go to ll;
if d>1 and m<1 then go to pp;
ll:t=t+2*1/(n1*x**(2-r)-k1);
if d<1 and m>1 then go to nn;
pp:t=t+2*1/(k1*x**(2-r)-n1);
nn:t=t;
end;
t=t*h/3;
if d<1 and m>1 then t=t*(1/(m-1));
if d>1 and m<1 then t=t*(1/(1-d));
if i<=n2 then output adriana;
end;
cards;
4 3 .8 1.7 proc print data=adriana;
title1 'solucion numerica de dw/dt=4w**.8-3w**1.7';
title2 ' n=4 k=3 d=.8 m=1.7';
var w t;
proc plot;
plot w*t='+" / vaxis=0 to 1.5 by .05 haxis=0 to 6 by 1;
title1 ' grafica t vs w ';
run;
```

4 Referencias

[1] Bertalanffy, L von *Teoría general de los sistemas*. Fondo de Cultura Económica. México. 1976.

[2] Sparre, P.; Ursin, E.; Venema, S. *Introduction to tropical fish stock assessment*. Part 1. FAO. Fisheries technical paper. 306/1 337 p.

[3] Rodríguez C.J.; Rodríguez J. *A growth functional equation*. Revista de Ciencias. 1993. 8:111–114. Universidad del Valle. Facultad de Ciencias.