REDUCCION DE UN PROBLEMA DE COHOMOLOGIA LOCAL

Alvaro Garzón
Marco Fidel Suarez.
Departamento de Matemáticas.
Universidad del Valle.

Resumen

Se reduce el cálculo de los grupos de cohomología $H^i(G,B)$ para el caso en que G es el grupo de Galois de una extensión cíclica finita L/K de cuerpos numéricos y B el anillo de enteros de L; utilizando sucesiones exactas de grupos de cohomología y un teorema de localización.

Introducción

Sea A un dominio de Dedekind con cuerpo de fracciones K, L una extensión finita de Galois de K con grupo de Galois G y B la clausura entera de A en L. Entonces los grupos de cohomología de G en B denotados por $H^i(G,\ B)$ para todo entero i son A- modulos.

El proceso de cómputo de estos grupos de cohomología es en general una tarea dificil; por lo cual los especialistas se han dedicado a través del tiempo a intentar hacer reducciones con miras a simplificar dichos cálculos.

La primera es la del caso cíclico en la cual se demuestra que $H^i(G,\ B) \cong H^{i+2}(G,B)$ para todo i entero ([5], 3-2-1). Gracias a este resultado es suficiente calcular los grupos de cohomología en dimensiones 0 y 1 para conocer así la cohomología en general.

Utilizando el proceso de localización, en ([1]) se obtiene el siguiente resultado

Teorema 1.

Si ϕ es un conjunto de ideales primos de L que contiene exactamente un divisor q por cada ideal primo $\mathcal{P}$ de K entonces para cualquier entero i

$$(1) \qquad H^i(G,\ B) \simeq \oplus H^i(G_q,\ \widehat{B}_q) \ \ q \in \phi$$

donde $\widehat{B}_q$ es el anillo de enteros de la completación q-ádica $\hat{L}_q$ de L y G_q es el grupo de descomposición de q en L/K.

Utilizando los resultados anteriores se demuestra en ([2]) que si L/K es cíclica de grado primo entonces $H^i(G,\ B) \cong H^j(G,\ B)$ para cualquier par de enteros $i,\ j$.

En este artículo nos proponemos reducir el estudio de los grupos de cohomología para el caso cíclico general demostrando el siguiente teorema.

Teorema 2.

Sean L y K extensiones finitas normales de $\mathbb{Q}$ con anillo de enteros B y A respectivamente. Si L/K es cíclica con grupo de Galois G entonces

$$H^i(G,\ B) \cong \oplus H^i(\widetilde{G}_p,\ R)$$

donde $\widetilde{G}_p$ es un p-subgrupo de Sylow de G_q en el teorema 1,y R es un subanillo de $\widehat{B}_q$.

Aún cuando los resultados mencionados reducen el estudio de los grupos de cohomología para el caso cíclico las reducciones obtenidas conducen a interrogantes como estos:

¿Puede ser infinito el número de sumandos directos que aparecen en (1)?

Si el número de sumandos es finito ¿qué condición debe cumplir q para que $H^i(G_q,\ \widehat{B}_q) \neq (0)$?

Estas dos preguntas se resuelven en ([7]). Más aún se demuestra que en la descomposición mencionada aparecen como máximo tantos sumandos como números primos dividan el orden del grupo G.

La importancia del teorema 2 radica en el hecho de que el cálculo de los grupos de cohomología $H^i(G,\ B)$ para el caso cíclico se reduce al de p-grupo. En esta situación ya sea por cálculo directo o por resultados conocidos estamos más cerca de obtener información precisa sobre la cohomología para el caso cíclico.

Antes de entrar a demostrar este teorema es necesario conocer algunos resultados preliminares.

§1 Preliminares.

Sea G un grupo finito multiplicativo y $\mathbb{Z}[G] = \Gamma$ el anillo grupo de G. Entonces los elementos de Γ son sumas formales $\sum_{\delta\in G} n_\delta \cdot \delta\ ;\ n_\delta \in \mathbb{Z}$.

Se define sobre Γ la adición componente a componente y el producto en la forma natural:

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta\in G} n_\delta \cdot \delta + \sum_{\delta\in G} m_\delta \cdot \delta &= \sum_{\delta\in G}(m_\delta + n_\delta)\cdot\delta \ \text{ y}\\
(\sum_{\delta\in G} m_\delta \cdot \delta)(\sum_{\delta\in G} n_\delta \cdot \delta) &= \sum_{\delta\in G}(\sum_{\tau\in G} m_\tau n_{\tau^{-1}\delta})\cdot\delta
\end{aligned}$$

Se acostumbrará a renombrar objetos asociados con Γ en términos de G. Por ejemplo se dirá que un grupo abeliano aditivo A es un G-módulo cuando sea un Γ-módulo.

Supongase que $\phi : A' \to A$ y $\psi : B \to B'$ son G-homomorfismos de G- módulos y sea $f \in Hom_G(A,\ B)$ entonces se define $(\phi,\ \psi)f = \psi \circ f \circ \phi \in Hom_G(A',\ B')$.

Sean G y G'' grupos finitos y sea A un G-módulo, supongase que $\lambda : G'' \to\ G$ es un homomorfismo, entonces es fácil demostrar que A se convierte en un G''-módulo(basta con definir $\delta' a = \lambda\delta' a$).

El símbolo $(G,\ A)$; que llamaremos par se utilizará para significar que A es un G-módulo. Supongase que se tiene otro par $(G',\ A')$; un homomorfismo $\lambda : G'' \to G$ y un G'-homomorfismo $f : A \to A'$, entonces el objeto de composición $(\lambda,\ f)$ es llamado homomorfismo de pares; simbólicamente

$$(\lambda, f) : (G, A) \to (G',\ A').$$

Si $(\lambda,\ f)$ es un homomorfismo de pares; $(X,\ \partial,\ -1)$ es cualquier G-complejo ([5], I. § 3) y $(X',\ \partial',\ -1)$ es cualquier G'-complejo entonces existe un homomorfismo de grupos de cohomología determinado en forma canónica ([5], Teorema 2-1-8).

$$(\lambda,\ f)_{X,\ X'} : H^n(G,\ A) \to H^n(G',\ A').$$

§2 Algunas funciones de grupos de cohomología.

A lo largo de esta sección A denotará un G-módulo, H un subgrupo normal de G y $A^H = \{a \in A;\ \rho a = a\ \forall \rho \in H\}$.

Considerese ahora $G = \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i H$ la descomposición de G en coclases izquierdas. Se define sobre el G-módulo A la función

$$S_{H\to G}(a) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i(a) \quad a \in A^H$$

llamada la función traza de H en G.

Sea X cualquier G-complejo, entonces X es también un H-complejo y se tiene un homomorfismo ([5], 2-4).

$$S_{H\to G} : Hom_H(X,\ A) \to Hom_G(X,\ A)$$

el cual determina un homomorfismo de grupos de cohomología llamado **transferencia** ó **correstricción**

$$Cor : H^n(H,\ A) \to H^n(G,\ A)\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Otra función importante de grupos de cohomología es

$$defl : H^{-n}(G,\ A) \to H^{-n}(G/H,\ A^H) \quad n \geq 1$$

llamada **deflación**, definida en ([6]). Más aún se puede definir $defl$ en dimensión cero de tal forma que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A^G \arrow[r, "I"] \arrow[d, "k"'] & A^G = (A^H)^{G/H} \arrow[d, "k"] \\ H^0(G,A) \arrow[r, "defl"] & H^0(G/H, A^H) \end{tikzcd}$$

(ver definición de k en ([5], 2-2-6)) sea conmutativo. Así $defl \circ k^G = k^{G/H}$ para todo $a \in A^G$.

Ahora considerese la sucesión

$$A^H \xrightarrow{S_{H\to G}} A^G \xrightarrow{i} A^G \to 0$$

la cual no es exacta, pero como $S_{H\to G} : S_H A \to S_G A$ y $S_G A = S_{H\to G}(S_H A) \subset S_{H\to G}A^H = S_{G/H}A^H$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo con fila superior exacta.

$$\begin{tikzcd}
A^H/S_H A \arrow[r, "S_{H\to G}"] \arrow[d, "\overline{k}"'] & A^G/S_G A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{k}"'] & A^G/S_{G/H}A^H \arrow[r] \arrow[d, "\overline{k}"'] & O \\
H^0(H,A) \arrow[r, "cor"] & H^0(G,A) \arrow[r, "defl"] & H^0(G/H,A^H) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

y como los $\overline{k}$ son isomorfismos entonces la sucesión

$$(2) \qquad H^0(H,\ A) \xrightarrow{cor} H^0(G,\ A) \xrightarrow{defl} H^0(G/H,\ A^H) \to 0$$

es exacta.

En los párrafos anteriores se encontró una sucesión exacta de grupos de cohomología en dimensión cero; pero existen otras funciones de grupos de cohomología que conducen a una sucesión exacta en dimensión 1.

Si $a \in A^H$ y $\delta \in G$ entonces $\delta a \in A^H$; (como H es normal en G entonces para todo $\rho \in H$, existe $\rho' \in H$ tal que $\rho\delta = \delta\rho'$). Además $(\delta\rho)a = \delta a$ así que A^H puede verse como un G/H-módulo.

Sea $\pi : G \to G/H$ el homomorfismo canónico e $i : A^H \to A$ la inclusión, entonces cuando A^H es visto como G módulo via π, i se convierte en un G-homomorfismo y en consecuencia $(\pi,\ i) : (G/H,\ A^H) \to (G,\ A)$ es un homomorfismo de pares. Entonces existe una función de grupos de cohomología

$$(\pi,\ i)_* : H^n(G/H,\ A^H) \to H^n(G,\ A) \quad n \geq 1$$

Puesto que π no es 1-1, esta función solo se tiene para dimensión $n \geq 1$ ([5], II, § 1). Se escribirá $inf = (\pi, i)_*$ y se llamará función **inflación**.

Si I denota la función identidad en A e $i = i_{H \to G}$ la inclusión de H en G, entonces $(i, I) : (G, A) \to (H, A)$ es un homomorfismo de pares y puesto que i es un monomorfismo surge una función de grupos de cohomología

$$res = (i, I)_* : H^n(G, A) \to H^n(H, A)$$

que se llamará **restricción** de G a H.

Ahora considerese la sucesión

$$0 \to H^n(G/H, A^H) \xrightarrow{infl} H^n(G, A) \xrightarrow{res} H^n(H, A) \tag{3}$$

Por ([5], 3-4-2) se tiene que (3) es exacta en dimensión 1.

§3 Reducción de un problema local.

En esta sección se presentará una aplicación de las sucesiones exactas antes mencionadas a la reducción de un problema de cohomología local.

Supongase que K es un cuerpo local, es decir completo con respecto a una valuación discreta y A su respectivo anillo de enteros. Se puede ver que A es un anillo de valuación discreta ([3], I, § 7). Se simbolizará por $\mathcal{P}$ su ideal maximal y además se supondrá que $A/\mathcal{P}$ es perfecto.

Definición: Sea L una extensión finita de K y p la característica de $A/\mathcal{P}$. Si p divide a e_q (e_q es el índice de ramificación de q en L/K) con q que cae sobre $\mathcal{P}$, se dice que L/K es *fuertemente* ramificada. Si esto no ocurre (p no divide a e_q), entonces se dice que L/K es *débilmente* ramificada.

Lema 1 Sea K un cuerpo local con anillo de enteros A, L una extensión cíclica finita de K con grupo de Galois G y B la clausura entera de A en L. Si L/K es fuertemente ramificada entonces existe un p-subgrupo de Sylow G_p y un subgrupo H isomorfo a G/G_p de G tal que L/L^H es débilmente ramificada y L^H/K es fuertemente ramificada.

Demostración: Sea $\mathcal{P}$ el ideal primo de A y q el de B. Puesto que L/K es de Galois, entonces

$$o(G) = [L:K] = e_q \cdot f_q \qquad ([4],\ \text{II}\ ,\S 1)\ ,$$

donde $[B/q : A/\mathcal{P}] = f_q$; como $p \mid e_q$, entonces p divide a $o(G)$. Por lo tanto $o(G) = p^r m$ con $(m,p) = 1$ y en consecuencia G tiene un p-subgrupo.

Sean G_p y H subgrupos de G tales que G_p es un p-subgrupo de Sylow y $o(H) = m$; en tal situación H es isomorfo a G/G_p.

Considerese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & L \\
R \arrow[u] \arrow[r] & L^H = E \arrow[u] \\
A \arrow[u] \arrow[r] & K \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Se denotará por $\mathcal{R}$ el ideal maximal de R y sea ϵ tal que $\mathcal{R}B = q^\epsilon$.

Por el teorema fundamental de la teoría de Galois L/E es de Galois y

$$o(H) = \frac{o(G)}{o(G_p)} = [L:E] = \epsilon \cdot f$$

con $[B/q : R/\mathcal{R}] = f$. Como G_p es p-subgrupo de Sylow, entonces el orden de G_p es primo relativo con el orden de H, por lo tanto $p \nmid \epsilon$ y L/E es débilmente ramificada. Ahora, si E/K fuese débilmente ramificada entonces por ([4], II, Prop 13) L/K también lo sería, lo cual es una contradicción.

Demostración del Teorema 2: Por ([1], § 1, Lema 1-8) tenemos que si $H^i(G_q,\ \widehat{B}_q) \neq 0$ en (1), entonces $\widehat{L}_q/\widehat{K}_{\mathcal{P}}$ es fuertemente ramificada y por el lema 1 existe un p-subgrupo de Sylow $\widetilde{G}_p$ y un subgrupo H isomorfo a $G_q/\widetilde{G}_p$ de G_q tal que $\widetilde{L}_q/\widetilde{L}_q^H$ es débilmente ramificada.

Ahora, puesto que las sucesiones (2) y (3) son exactas, entonces se tiene que

$$0 \to H^1(\tilde{G}_p,\ \hat{B}_q^H) \xrightarrow{infl} H^1(G_q,\ \hat{B}_q) \xrightarrow{Res} H^1(H,\ \hat{B}_q)$$

$$H^0(H,\ \hat{B}_q) \xrightarrow{cor} H^0(G_q,\ \hat{B}_q) \xrightarrow{defl} H^0(\tilde{G}_p,\ \hat{B}_q^H) \to 0$$

son exactas. Pero por ([1] § 1, Lema 1-8)

$$H^0(H,\ \hat{B}_q) = (0) \qquad \text{y}$$

$$H^1(H,\ \hat{B}_q) = (0)\ .$$

Por lo tanto,

$$H^0(G_q,\ \hat{B}_q) \cong H^0(\tilde{G}_p,\ \hat{B}_q^H) \qquad \text{y}$$

$$H^1(G_q,\ \hat{B}_q) \cong H^0(\tilde{G}_p,\ \hat{B}_q^H)\ .$$

Ahora, como $\hat{L}_q/\widehat{K}_{\mathcal{P}}$ es cíclica y $H^i(G_q,\ \hat{B}_q) \cong H^{i+2}(G_q,\ \hat{B}_q)$ ([5], 3 - 2 - 1) se tiene que

$$H^i(G_q,\ \hat{B}_q) \cong H^i(\tilde{G}_p,\ \hat{B}_q^H)$$

para todo entero i.

Por lo anterior y reemplazando en el Teorema 1, se obtiene el isomorfismo del Teorema 2.

Referencias

[1] Suarez M. F. *Galois Cohomology in Dedekind Domains.* Tesis 1975.

[2] Suarez M. F. *Cohomología local de las extensiones ciclica de grado primo.* Revista Colombiana de Matemáticas Vol XIX,. 1985.

[**3**] Januz G. *Algebraic Number theory.* Academy Press. 1973.

[**4**] Lang S. *Algebraic Number theory.* Addison-Wesley. 1970.

[**5**] Weiss E. *Cohomology of groups.* Academy Press. .1969.

[**6**] Weiss E. *A Deflaction map..* Journal of Mathematics Vol 8. N. 2. 1959.

[**7**] Garzón A. *Cohomología de Galois en cuerpos numéricos.* Tesis 1993.