ACERCA DE LAS CONSTANTES DE LOS GRAFICOS DE CONTROL $\overline{X}$, σ

Javier Olaya O.
Unidad de Planeación Estadística
Universidad del Valle

Resumen

El artículo busca despejar una inquietud, relativamente común, acerca del origen de las constantes utilizadas en la construcción de gráficos de control $\overline{X}$, σ. Luego de una breve introducción, presenta soluciones teóricas, conclusiones y ejemplos.

Introducción

Es frecuente encontrar personas quienes, aún siendo expertas en el manejo de los tradicionales gráficos de control para variables $\overline{X}$, σ, no tienen muy claro el origen de las constantes (Tabla 1) que se acostumbra utilizar para el establecimiento de los límites "tres sigma" de los mismos, cuando se están controlando procesos que se supone generan "poblaciones normales". Incluso, los autores que podrían llamarse clásicos (1, 2, 3), difieren en las constantes de sus preferencias: los hay quienes utilizan A_1, c_2 y c_3 y también los que se inclinan más por A_3, c_4 y c_5 para alcanzar el mismo objetivo; todos, sinembargo, usan B_3 y B_4 para establecer los límites de control de gráfico σ sobre todo porque tienen el mismo valor numérico ya sea que se calculen a partir de c_2 y c_3 o de c_4 y c_5. El artículo se referirá a todas ellas.

Pero el objetivo principal es aportar luces para la comprensión del origen de las constantes, en dos bloques: uno, que podría llamarse "de lectura rápida" el cual se espera produzca una idea general de los resultados y consiste en omitir de la lectura la parte II; y el segundo, un poco más estadístico, que sería de "lectura detenida", que pretende avanzar en la solución teórica.

Notación

Durante años, los autores de temas estadísticos en control de calidad han utilizado el símbolo "prima" ($'$) acompañando a los símbolos comunes de la media aritmética ($\overline{X}$) o de la desviación estándar (σ) para denotar las características de la población (o, en este caso, del proceso). Así, $\overline{X}'$ es la media y σ' es la desviación estándar de la población. Sinembargo, la tendencia a uniformizar la notación de los últimos años ha hecho que sea cada vez frecuente el uso de los símbolos μ y σ para los mismos números, respectivamente.

Se utilizará entonces la siguiente notación:

	En la muestra	**En la población**
Media:	$\overline{X}$	μ
Desviación estándar:		σ
Definición uno:	S	
Definición dos:	S'	
Varianza:	S^2 ó S'^2	σ^2

Los valores esperados, las varianzas y las desviaciones estándar de los estadísticos se denotarán con los símbolos siguientes:

Estadístico	**Valor esperado**	**Varianza**	**Desviación estándar**
Media:	$\mu_{\overline{X}}$	$V(\overline{X})$	$\sigma_{\overline{X}}$
Desviación estándar (1)	μ_S	$V(S)$	σ_S
Desviación estándar (2)	$\mu_{S'}$	$V(S')$	$\sigma_{S'}$

En la definición uno,

$$S = +\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{(n-1)}\right]} \tag{1}$$

y en la definición dos,

$$S' = +\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{(n)}\right]} \tag{2}$$

Además, como se utilizan k muestras para instalar un gráfico de control, entonces se escoge la siguiente notación: sean $\overline{X}_j$ y S_j ó S'_j la media y desviación estándar de la muestra j, entonces:

$$\overline{\overline{X}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{X}_j}{k} , \tag{3}$$

será las medias de las medias.

$$\overline{S} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{S}_j}{k} , \tag{4}$$

será la media de las desviaciones estándar calculadas usando la ecuación (1).

$$\overline{S'} = \sum_{j=1}^{k} \frac{S'_j}{k} , \tag{5}$$

será la media de las desviaciones estándar calculadas usando la ecuación (2).

Finalmente, para los límites de control se adoptará la notación:

	Para el gráfico $\overline{X}$	**Para el gráfico σ**
Límite superior	$LS_{\overline{X}}$	LS_σ
Límite inferior	$LI_{\overline{X}}$	LI_σ
Línea central	$LC_{\overline{X}}$	LC_σ

Límites para los Gráficos de Control $\overline{X}$, σ

Si se está utilizando un gráfico $\overline{X}$, σ los límites "3–sigma" se calculan así:

	A partir de S		**A partir de S'**	
Gráfico $\overline{X}$:	$LS_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_3\,\overline{S}$ $LI_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_3\,\overline{S}$ $LC_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}$	**(6a)**	$LS_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + A_1\,\overline{S}'$ $LI_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - A_1\,\overline{S}'$ $LC_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}$	**(6b)**
Gráfico σ:	$LS_\sigma = B_4\,\overline{S}$ $LI_\sigma = B_3\,\overline{S}$ $LC_\sigma = \overline{S}$	**(7a)**	$LS_\sigma = B_4\,\overline{S}'$ $LI_\sigma = B_3\,\overline{S}'$ $LC_\sigma = \overline{S}'$	**(7b)**

En lo sucesivo el artículo discurrirá así: inicialmente, se ilustra el significado de la constante A_3 y, como en ella aparece una nueva constante c_4, se determinará ésta en la sección siguiente; aprovechando los resultados de la sección se presentará una nueva constante c_5 y a partir de c_4 y c_5 se definirán B_3 y B_4. Posteriormente se hará lo mismo con A_1, c_2 y c_3 y con B_3 y B_4 definidos a partir de c_2 y c_3.

PARTE I: Constantes para el Gráfico $\overline{X}$, construido a partir de S

Se sabe que $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ y que $\mu_{\overline{X}} = \mu$. Si se conocieran μ y σ, los límites de control 3–sigma serían:

$$\begin{aligned} LS_{\overline{X}} &= \mu + 3\sigma/\sqrt{n} \\ LI_{\overline{X}} &= \mu - 3\sigma/\sqrt{n} \\ LC_{\overline{X}} &= \mu \end{aligned} \tag{8}$$

(Al factor $3/\sqrt{n}$ se le denota a veces con la letra A). Pero, en general, μ y σ no se conocen y por tanto deben estimarse. Es conocido que $\overline{X}$ es un buen estimador de μ; entonces se acostumbra utilizar $\overline{\overline{X}}$, que es un promedio obtenido a partir de todas las observaciones, como línea central del gráfico $\overline{X}$, es decir,

$$LC_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} \tag{9}$$

Lo que no es muy conocido es que

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{S}}{c_4} \tag{10}$$

es un buen estimador, insesgado al menos, de σ.

Nota: Para efectos de continuidad en esta sección se finalizará con el establecimiento de los límites de control para el gráfico $\overline{X}$. El significado de c_4 y la obtención del estimador $\hat{\sigma}$ se dejará para la siguiente sección.

Entonces, utilizando ambos estimadores,

$$\begin{aligned} LS_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} + \left(\frac{3}{c_4\sqrt{n}}\right)\overline{S} \\ LI_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} - \left(\frac{3}{c_4\sqrt{n}}\right)\overline{S} \end{aligned} \tag{11}$$

Y, si se denota

$$A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \tag{12}$$

entonces,

$$\begin{aligned} LS_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} + A_3\,\overline{S} \\ LI_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} - A_3\,S \end{aligned} \tag{13}$$

los cuales son los límites conocidos para el gráfico $\overline{X}$, ecuación (6a).

Persisten las dudas: ¿Qué es c_4 ? y ¿Por qué se asegura que $\sigma = \frac{\overline{S}}{c_4}$ es un estimador de σ ?

PARTE II: El Valor Esperado y la Varianza de S

Si se muestrean poblaciones normales, es conocido que la variable

$$V = \frac{[(n-1)S^2]}{\sigma^2} \tag{14}$$

sigue una distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad. Esto significa que la densidad de V, será

$$f(v) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\, v^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2}v} \quad , \qquad v > 0 \tag{15}$$

Posiblemente algún lector no esté familiarizado con la función gamma: para él se incluye el siguiente resumen:

La función gamma, denotada $\Gamma(\cdot)$, está definida por:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \, dx \quad , \qquad t > 0 \tag{16}$$

Entonces $\Gamma(t)$ es una notación para la integral definida que aparece a la derecha en la ecuación (16). Si se integra por partes, se llega a la expresión de recurrencia,

$$\Gamma(t+1) = t \ \Gamma(t) \tag{17}$$

de donde, si t es un entero ($t = n$), entonces,

$$\Gamma(n+1) = n \ ! \tag{18}$$

Por otra parte, para n entero

$$\Gamma(n + 1/2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ \cdot \ \cdots \ \cdot \ (2n-1)\sqrt{\pi}/2^n \tag{19}$$

Y en particular,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \ \Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{20}$$

El propósito de esta sección es determinar el valor esperado μ_S y la desviación estándar σ_S de la variable S.

Se sabe que

$$\mu_S = E(S)$$

y también que

$$V(S) = E[(S - \mu_S)^2] = [E(S^2) - \mu_S^2 \tag{21}$$

lo cual significa que se requiere $E(S)$ y $E(S^2)$ para hallar $V(S)$; entonces sería preferible determinar $E(S^i)$ y a partir de aquí particularizar.

A partir de la ecuación (14), se tiene que:

$$S^i = \sigma^i \left(\frac{V}{n-1} \right)^{i/2} \tag{22}$$

Por lo que:

$$E(S^i) = \int_0^\infty \sigma^i \left(\frac{v}{n-1}\right)^{i/2} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} v^{(\frac{n-1}{2})-1} e^{-\frac{1}{2}v}\, dv \tag{23}$$

Y mediante el cambio de variable:

$$W = (1/2)\, V \tag{24}$$

Entonces

$$E(S^i) = \int_0^\infty \sigma^i \left(\frac{v}{n-1}\right)^{i/2} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} (2w)^{(\frac{n-1+i}{2})-1} e^{-w}\, 2\, dw \tag{25}$$

lo cual conduce a

$$E(S^i) = \sigma^i \left(\frac{2}{n-1}\right)^{i/2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty w^{(\frac{n-1+i}{2})-1} e^{-w}\, dw \tag{26}$$

y, utilizando el resultado de la ecuación (16),

$$E(S^i) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1+i}{2}\right)}{(n-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, \sigma^1 \tag{27}$$

Cuando $i = 1$

$$E(S) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\, \sigma \tag{28}$$

y si llamamos

$$C_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{29}$$

entonces el valor esperado de S será:

$$E(S) = c_4\, \sigma \tag{30}$$

Si se utiliza $\overline{S}$, de la ecuación (3), como estimador de μ_S y $\hat{\sigma}$ como estimador de σ, entonces

$$\overline{S} = c_4\, \hat{\sigma} \tag{31}$$

y de aquí

$$\hat{\sigma} = \overline{S}/c_4 \tag{32}$$

sería un estimador de σ, tal como se planteó en la ecuación (10). Por otra parte, si $i = 2$,

$$E(S^2) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\;\sigma^2 \tag{33}$$

pero, por la expresión de recurrencia de la ecuación (17),

$$\Gamma[(n+1)/2] = [(n-1)/2]\;\Gamma[(n-1)/2] \tag{34}$$

lo cual, reemplazando en la ecuación (33) conduce a:

$$E(S^2) = \sigma^2 \tag{35}$$

y este resultado sí es bastante conocido.

Como el interés principal está en determinar la varianza de S, entonces, de acuerdo a la ecuación (21)

$$V(S) = \sigma^2 - (c_4\sigma)^2 \tag{36}$$

y por tanto,

$$V(S) = (1 - c_4^2)\;\sigma^2 \tag{37}$$

lo cual significa que:

$$\sigma_S = \sigma\;\sqrt{(1 - c_4^2)} \tag{38}$$

Y si denotamos

$$C_5 = \sqrt{1 - c_4^2} \tag{39}$$

entonces

$$\sigma_S = c_5\;\sigma \tag{40}$$

es la expresión para el error estándar de S.

De hecho,

$$\hat{\sigma}_S = c_5\;\hat{\sigma} = (c_5/c_4)\overline{S} \tag{41}$$

puede utilizarse como estimador de σ_S.

Constantes para el Gráfico σ, a partir de S.

Para el gráfico σ, si se conocieran μ_S y σ_S, los límites serían:

$$\begin{aligned} LS_\sigma &= \mu_S + 3\sigma_S \\ LI_\sigma &= \mu_S - 3\sigma_S \\ LC_\sigma &= \mu_S \end{aligned} \tag{42}$$

Pero como μ_S y σ_S en general se desconocen, deben estimarse. Si $E(S) = \mu_S$ se estima como $\overline{S}$, entonces

$$LC_\sigma = \overline{S} \tag{43}$$

y, si σ_S se estima como $c_5\hat{\sigma}$, entonces

$$\begin{aligned} LS_\sigma &= \overline{S} + 3c_5\hat{\sigma} \\ LI_\sigma &= \overline{S} - 3c_5\hat{\sigma} \end{aligned} \tag{44}$$

Si se reemplaza $\hat{\sigma}$ por $\overline{S}/c_4$, resulta

$$\begin{aligned} LS_\sigma &= \overline{S} + (3c_5/c_4)\,\overline{S} \\ LI_\sigma &= \overline{S} - (3c_5/c_4)\,\overline{S} \end{aligned} \tag{45}$$

de donde, denotando

$$\begin{aligned} B_4 &= 1 + 3c_5/c_4 \\ B_3 &= 1 - 3c_5/c_4 \end{aligned} \tag{46}$$

resulta que los límites de control son

$$\begin{aligned} LS_\sigma &= B_4\,\overline{S} \\ LI_\sigma &= B_3\,\overline{S} \end{aligned} \tag{47}$$

o sea, los límites ya planteados en la ecuación (7a).

Resumen de Resultados Iniciales.

Las constantes utilizadas en la construcción de los gráficos de control $\overline{X}$, σ, a partir de S, se acostumbran a denotar A_3, B_3 y B_4.

A_3 la constante utilizada en la construcción del gráfico $\overline{X}$, es:

$$A_3 = 3/c_4\sqrt{n}$$

donde

$$c_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{48}$$

B_3 y B_4, las constantes utilizadas en la construcción del gráfico σ, son:

$$\begin{aligned} B_4 &= 1 + 3c_5/c_4 \\ B_3 &= 1 - 3c_5/c_4 \end{aligned}$$

donde

$$c_5 = \sqrt{[(1 - c_4)^2]}$$

Nótese que todas las constantes dependen de n.

Ejemplo 1.

Supóngase que $n = 9$. En este caso:

1. $c_4 = \Gamma(4.5)/\Gamma(4)\sqrt{(1/4)}$
   $\Gamma(4.5) = \Gamma(4 + 1/2 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{\pi}/2^4$ (ver ecuación (19)).
   $\Gamma(4) = 3$
   $c_4 = 0.969$ (ver Tabla 1)
2. $A_3 = 3/0.969\sqrt{9}$
   $A_3 = 1.032$
3. $c_5 = \sqrt{(1 - 0.969^2)}$
   $c_5 = 0.246$
4. $B_3 = 1 - 3(0.246)/0.969$
   $B_3 = 0.239$
5. $B_4 = 1 + 3(0.246)/0.969$
   $B_4 = 1.761$

PARTE IV: El Valor Esperado y la Varianza de S'.

En realidad, aunque S^2 es un estimador insesgado y S'^2 es un estimador sesgado de σ_x^2, tanto S como S' son estimadores sesgados de σ. La constante c_4 presupone el uso de S, ecuación (1), para el cálculo de la desviación estándar de cada muestra precisamente para construir un estimador insesgado de σ a partir de S. Algunos autores, entre ellos Grant (3), utilizan otra constante, denotada c_2 que presupone el uso de S', ecuación (2), para el cálculo de la desviación estándar muestral.

Se sabe que:

$$E(S'^2) = [(n-1)/n]\,\sigma^2 \tag{49}$$

Además, de acuerdo a Grant (3),

$$E(S') = c_2\sigma \tag{50}$$

por lo cual, procediendo igual que la parte II,

$$V(S') = [(n-1)/n - c_2^2]\,\sigma^2 \tag{51}$$

resultando

$$\sigma_S = \sigma\,\sqrt{[(n-1)/n - c_2^2]} \tag{52}$$

y si se denota,

$$c_3 = \sqrt{[(n-1)/n - c_2^2]} \tag{53}$$

entonces,

$$\sigma_S = c_3\,\sigma \tag{54}$$

Nótese que de acuerdo a la ecuación (50), si se utiliza $\overline{S'}$ como estimador de $E(S')$, entonces

$$\hat{\sigma} = \overline{S'}/c_2 \tag{55}$$

es otro estimador para σ.

Grant (3), presenta como definición de la constante c_2, la siguiente:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)1\,!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)1\,!} \tag{56}$$

En realidad, Grant ha extendido la notación "factorial"(!) a las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma(n/2) &= [(n-2)/2]\,! \\ \Gamma(n-1)/2 &= [(n-3)/2]\,! \end{aligned} \tag{57}$$

de donde,

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{58}$$

resultado éste que puede encontrarse de manera similar a como se procedió en la parte II para hallar c_4, considerando que

$$U = nS'^2/\sigma^2$$

sigue también una distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad, y el cual muestra que c_2 y c_4 están estrechamente relacionados, así:

$$c_4 = c_2\,\sqrt{[n/(n-1)]} \tag{59}$$

PARTE V: Constantes para los Gráficos de Control $\overline{X}$, σ a partir de S'.

En forma análoga a los mecanismos utilizados en las partes I y III, se concluye que las constantes utilizadas en la construcción de los gráficos X,σ a partir de S', son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3/c_2\sqrt{n} \\ B_3 &= 1-3c_3/c_2 \\ B_4 &= 1+3c_3/c_2 \end{aligned}$$

donde,

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{60}$$

$$c_3 = \sqrt{[(n-1)/n - c_2^2]} \tag{61}$$

Ejemplo 2.

Supóngase que $n = 9$. En este caso:

1. $c_2 = [\Gamma(4.5)/\Gamma(4)] \cdot \sqrt{(2/9)}$
   $c_2 = 0.914$ (ver Tabla 1)

2. $A_1 = 3/0.914 \cdot \sqrt{9}$
   $A_1 = 1.094$

3. $c_3 = \sqrt{(8/9 - 0.914^2)}$
   $c_3 = 0.232$

4. $B_3 = 1 - 3(0.232)/0.914$
   $B_3 = 0.239$

5. $B_4 = 1 + 3(0.232)/0.914$
   $B_4 = 1.761$

Una observación importante es que B_3 y B_4 no cambian al usar c_2 y c_3 en lugar de c_4 y c_5, lo cual se explica porque, de acuerdo a las ecuaciones (39), (59) y (61),

$$c_3 = c_5 \cdot \sqrt{[(n-1)/n]} \tag{62}$$

P.S.: Desde luego, a la luz de la teoría de estimación, es claro que tanto $\overline{S'}/c_2$ como $\overline{S}/c_4$ son estimadores insesgados de σ; sinembargo, queda la inquietud de: ¿Cuál de ellos será preferible? Pero eso, como ya alguien dijo, es otra historia.

Tabla 1. Constantes utilizadas para determinar los limites de control tres sigma en Gráficos de Control $\overline{X}, \sigma$ cuando se muestrean poblaciones normales.

Tamaño de la muestra	A partir de $S'^{(1)}$			A partir de $S'^{(2)}$				
n	A_1	C_2	C_3	A_3	C_4	C_5	B_3	B_4
2	3.760	7.000	0.426	2.659	0.798	0.603	0.000	3.267
3	2.394	0.724	0.378	1.954	0.886	0.463	0.000	2.568
4	1.880	0.798	0.367	1.628	0.921	0.389	0.000	2.266
5	1.595	0.841	0.305	1.427	0.940	0.341	0.000	2.089
6	1.410	0.869	0.281	1.287	0.952	0.308	0.030	1.970
7	1.277	0.888	0.261	1.182	0.959	0.282	0.118	1.882
8	1.175	0.903	0.245	1.099	0.965	0.262	0.185	1.815
9	1.094	0.914	0.231	1.032	0.969	0.246	0.239	1.761
10	1.028	0.923	0.221	0.975	0.973	0.232	0.284	1.716
11	0.973	0.930	0.210	0.927	0.975	0.221	0.321	1.679
12	0.925	0.936	0.202	0.886	0.978	0.211	0.354	1.646
13	0.884	0.941	0.194	0.850	0.979	0.202	0.382	1.618
14	0.848	0.945	0.187	0.817	0.981	0.194	0.406	1.594
15	0.816	0.949	0.181	0.789	0.982	0.187	0.428	1.572
16	0.788	0.952	0.175	0.763	0.983	0.181	0.448	1.552
17	0.762	0.955	0.170	0.739	0.985	0.175	0.466	1.534
18	0.738	0.958	0.166	0.718	0.985	0.170	0.482	1.518
19	0.717	0.960	0.161	0.698	0.986	0.165	0.497	1.503
20	0.697	0.962	0.157	0.680	0.987	0.161	0.510	1.490
21	0.679	0.964	0.153	0.663	0.988	0.157	0.523	1.477
22	0.663	0.966	0.150	0.647	0.988	0.153	0.534	1.466
23	0.647	0.967	0.146	0.633	0.989	0.150	0.545	1.455
24	0.632	0.968	0.143	0.619	0.989	0.147	0.555	1.445
25	0.619	0.970	0.141	0.606	0.990	0.144	0.565	1.435

(1) $$S' = +\sqrt{[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2/n]}$$

(2) $$S' = +\sqrt{[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2/(n-1)]}$$

Bibliografía

1. BURR, I. W. *Statistical Quality Control Methods*, New York: Marcel Dekker, 1976.

2. DUNCAN, A. J. *Quality Control and Industrial Statistics*, Homewood (Ill): Richard D. Irwin, 1986.

3. GRANT, E. L. y LEAVENWORTH, R. S. *Control Estadístico de Calidad*, México: CECSA, 1984.

4. MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A. y BOES, D. C. *Introduction to the Theory of Statistics*, Tokyo: McGraw Hill, 1974.