APLICACION DE UN MODELO DE CRECIMIENTO EN BIOLOGIA

Jorge Rodríguez B.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle

RESUMEN

En este artículo se presenta la deducción matemática de la ecuación de crecimiento Von Bertalanffy junto con su interpretación biologica y se aplica al crecimiento en longitud del arenque del Pacifico (Clupea Pallasii), utilizando los métodos de Gulland Holt y Von Bertalanffy para la estimación de los parametros l_∞, K y t_0.

INTRODUCCION

El propósito de este artículo es presentar la ecuación del crecimiento de Von Bertalanffy, aplicada al crecimiento en longitud del Arenque del Pacifico.

Los biólogos y matemáticos pesqueros, Gulland, Beverton, Holt, Rickér y Pauly han destacado en sus trabajos la importancia de esta ecuación en el manejo y evaluación de recursos marinos ([1],[2],[3].[4]).

En los modelos biomatemáticos deseamos en general que ellos posean al menos algunas de las siguientes características:

1. Que los datos provenientes de los registros estadísticos sean fáciles de ajustar.
2. Que los parámetros que intervienen en el modelo sean pocos y que en lo posible tengan un **significado biológico**.
3. Que se puedan hacer extrapolaciones en rangos razonables (de acuerdo al problema biológico, objeto de estudio).

El modelo que veremos a continuación para el crecimiento en longitud del arenque del Pacífico tiene estas características.

LA ECUACION DE VON BERTALANFFY

Se dice que una magnitud variable $l = l(t)$, que varía con el tiempo t sigue una ley de crecimiento de Von Bertalanffy si satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dl}{dt} = k(l_\infty - l) \quad , \qquad 0 \leq l \leq l_\infty \tag{1}$$

donde k y l_∞ son constantes positivas.

Por el método de separación de variables se obtiene que la solución de la ecuación diferencial (1) con la condición incial $l(t_0) = 0$ es la función definida para todo t por,

$$l = l_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)}) \tag{2}$$

Esta solución satisface

$$0 \leq l_t < l_\infty \quad , \quad y \quad \lim_{t\to\infty} l_t = l_\infty$$

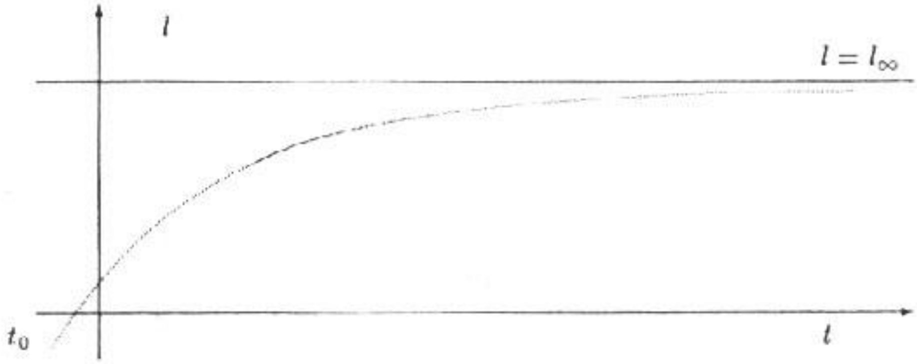

Figura 1: Curva de crecimiento de Von Bertalanffy.

Significado biológico

Supongamos en el proceso de crecimiento de un animal que la variable l representa longitud y la variable t edad. Entonces el parámetro l_∞ , conocido como **longitud asintótica**, representa la máxima longitud alcanzada en el crecimiento. El parámetro t_0 representa aquella **edad virtual** en que el animal tendría una longitud cero, y el parámetro k es un índice de la rapidez de crecimiento, de forma que valores altos de k corresponden a crecimientos más rápidos.

ESTIMACION DE PARAMETROS

Para la estimación de los parámetros l_∞ y k emplearemos el método de **Gulland-Holt**, con base en la regresión lineal:

$$\frac{dl}{dt} \text{ vs } l .$$

Utilizaremos la aproximación $\frac{dl}{dt} \approx \frac{\Delta l}{\Delta t}$ con $\Delta t = 1$, pués para el caso del arenque los registros de longitud vs. edad se tienen por años.

Así la regresión lineal se simplifica a:

$$\Delta l \text{ vs } l$$

De la ecuación 2, obtenemos la relación lineal

$$\Delta l = l_\infty(1 - e^{-k}) - (1 - e^{-k})l \tag{3}$$

con $y = \Delta l$, $x = l$, el modelo lineal propuesto toma la forma $y = a + bx$, donde

$$a = l_\infty(1 - e^{-k}) \quad ; \quad b = -(1 - e^{-k})$$

En base a la siguiente estadística de *longitud vs edad*, tomada para el arenque del Pacífico en la costa occidental de Hokkaido, durante los años de 1910 a 1954, estimaremos los parámetros l_∞ y k.

Edad t (años)	Longitud l (cms)	Δl	$-1/k\ln(\frac{l_\infty - l}{l})$	$\hat{l}$	Error relativo % [2]
3	25,70	2,70	5,20	22.17	13
4	28,40	1,75	6,36	25.23	11
5	30,15	1,50	7,30	27.70	8
6	31,65	1,20	8,31	29.67	6
7	32,85	0,80	9,32	31.26	5
8	33,65	0,79	10,14	32.53	3
9	34,44	0,53	11,13	33.55	3
10	34,97	0,59	11,93	34.35	2
11	35,56	0,36	13,04	35.03	1
12[1]	35,92	1,01	13,89	35.56	1
13	36,93	0,11	17,68	35.98	3
14	37,04	0,66	18,38	36.32	3
15	37,70			36.59	3

(1) Este dato no se tuvo en cuenta en los cálculos de regresión.
(2) Error relativo : $\frac{|l - \hat{l}|}{l} \times 100\%$.

Tabla 1: Longitudes Promedios 1910-1954 . Arenque del Pacífico Costa occidental de Hokkaido. (Tomada de [4],pg. 46)

Presentamos a continuación el gráfico de regresión Δl vs l , y el cálculo de los parámetros a , b y , r^2 -coeficiente de determinación- , que indica la bondad de ajuste del modelo.

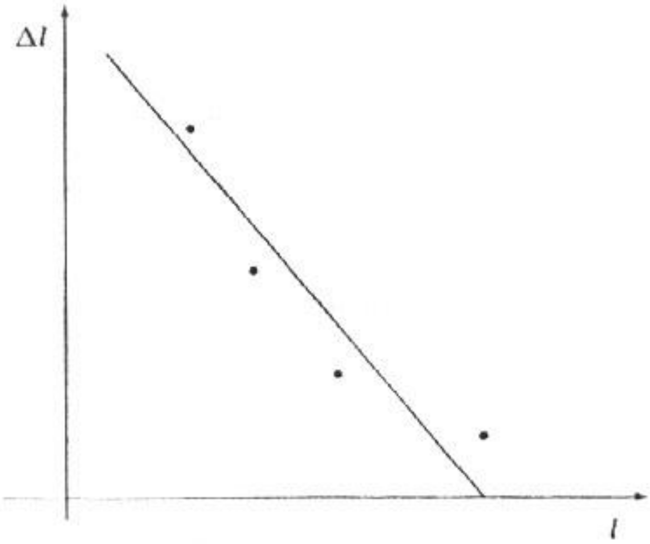

Figura 2: Regresión: Δl vs l . Arenque del Pacífico.

Calculos de regresión : Δl vs l

En la ecuación de regresión lineal , $y = a + bx$, es bien conocido que:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{n}[\sum y - b \sum x] \\
b &= \frac{\sum xy - \frac{1}{n}\sum x \sum y}{\sum x^2 - \frac{1}{n}(\sum x)^2} \\
r^2 &= \frac{a\sum y + b\sum xy - \frac{1}{n}(\sum y)^2}{\sum y^2 - \frac{1}{n}(\sum y)^2}
\end{aligned}
$$

En el caso del Arenque con $\Delta l = y$, $l = x$; y los datos de la tabla 1, se obtiene

$$
\begin{aligned}
a &= 7,54 \\
b &= -0,20 \\
\hat{l}_\infty &= \frac{a}{b} = 37,7 \\
\hat{k} &= -\ln(1+b) = -\ln 0,80 = 0,22 \\
r^2 &= 0,92
\end{aligned}
$$

Estimación de t_0

Despejando t , de la ecuación:

$$l = l_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

Obtenemos:

$$t = t_0 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{l_\infty - l}{l_\infty}\right) \tag{4}$$

Linealizando la ecuación 4 , por medio de :

$$x = t \quad , \quad y = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{l_\infty - l}{l_\infty}\right)$$

La regresión lineal de $y = a + bx$, permite estimar t_0, de acuerdo a $\hat{t}_0 = -\frac{a}{b}$.

Los datos proporcionados en la tabla 1, aplicados a la linea de regresión ,

$$y = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{l_\infty - l}{l}\right) \quad , \quad \text{vs} \quad , \; x = t$$

proporciona

$$\begin{aligned} a &= 1.21 \\ b &= 1.17 \\ r^2 &= 0.97 \\ \hat{t}_0 &= -\frac{a}{b} = -1.03 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de crecimiento en longitud estimada para el arenque del Pacífico, vendrá expresada aproximadamente por:

$$\hat{l} = 37,7(1 - e^{-0,22(t+1.03)}) \quad , \quad 3 \leq t \leq 15$$

l (cms) ; t (años) .

En esta aplicación al crecimiento en longitud promedio al arenque del pacífico, el error relativo nos muestra que la terna de parámetros l_∞, k, t_0, ajustan adecuada mente a los datos empiricos reportados en [4].

Referencias

1. P. SPARRE; E. URSIN; S. VENEMA. *Introduction to tropical fish stock assessment part I.* Manual. FAO. Fisheries techmical paper 306/1. Rome 1989.
2. CSIRKE, J. *Introducción a la dinámica de poblaciones de peces.* FAO Doc. Téc. Pesca. Roma 1980.
3. PAULY, D. *Some simple methods for the assessment of tropical fish streka.* FAO. Fish. Tech. pap. Rome 1983.
4. GULLAND, J.A. Manual de Métodos para la Evaluación de las Poblaciones de Peces. Editorial Acribia, Zaragoza (España). 1971.