LAZOS OBLICUOS SOBRE ELIPSOIDES

Oscar Andrés Montaño Carreño*

Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad del Valle, Cali

Recibido Nov-2006, **revisado** Mar-2007, **aceptado** Jun-2007 **Publicado** Dic-2007

Resumen. Sea σ una curva cerrada inmersa en R^3. Si s es el parámetro longitud de arco, llamaremos tangente indicatrix o tantrix, a la curva $T := \dot{\sigma}$. Demostramos en este nota que cada curva cerrada σ de clase C^3 inmersa en un elipsoide tiene un par de tangentes paralelas. Para ello demostramos primero que la curvatura geodésica total de la tantrix es cero, y si está encajada, entonces divide a S^2 en dos componentes de igual área.

Palabras y frases claves. Lazo oblicuo, esfera, curvatura geodésica, inmersión, tantrix.

Abstract. Let σ be a closed immersed curve in R^3 and let s denotes its arclenght parameter. We will call the tangent indicatrix or tantrix to the curve $T := \dot{\sigma}$. In this note we will prove that for every closed C^3-curve immersed in an ellipsoid, there must exist a pair of points in the curve with parallel tangent lines. In orden to prove this result, we will first prove that the total geodesic curvature of the tantrix of this curve is zero, and therefore, in the case that this tantrix is an embedding, then it must divide S^2 in two components with the same area.

Key words and phrases. Skew loop, sphere, geodesic curvature, immersion, tantrix

Clasificación Matemática AMS: 53A04, 53A05

Introducción.

Un lazo oblicuo es una curva cerrada inmersa en R^3 sin lineas tangentes paralelas. En el año 1966, H. Steinhaus conjeturó la no existencia de lazos oblicuos en R^3. En el año 1968 B. Segre [1] demuestra que la conjetura es falsa en R^3 pero verdadera sobre elipsoides y paraboloides. Estos resultados fueron recientemente extendidos y refinados por M. Ghomi y B. Solomon [2]. Ellos determinaron que no existen lazos oblicuos sobre superficies cuadrícas con un punto de curvatura positiva. Presentamos las ideas de Ghomi y Solomon en el caso particular del elipsoide.

La primera sección está dedicada a los preliminares geométricos, en la segunda sección demostramos tres lemas fundamentales para lazos inmersos en S^2; la tercera sección corresponde al resultado principal.

1. Preliminares geométricos

Una función $\sigma: S^1 \to S^2$ es una inmersión de la circunferencia en la esfera si y sólo si para todo $\theta \in R$ se tiene $\left|\frac{d}{d\theta}\sigma(e^{i\theta})\right| > 0$. Esta condición garantiza que la curva en S^2 no tiene esquinas o cúspides, aunque si puede intersecarse a sí misma. Si además $\sigma: S^1 \to S^2$ es un homeomorfismo (dando $\sigma(S^1)$ la topología inducida por (S^2)), diremos que σ es un encaje. La tantrix τ de una de tales inmersiones σ, de clase C^2 parametrizada por longitud de arco es $\tau := \dfrac{d\sigma}{ds}$. La tantrix de un lazo es una curva cerrada en S^2. Obsérvese que si σ es un lazo oblicuo entonces τ es un encaje y no contiene puntos antipodales.

Recordemos que una transformación afín es una aplicación $T: R^3 \to R^3$ de la forma $T(X) = AX + B$, donde A es una matriz de orden 3x3 y B es un vector columna 3x1.

Lema 1.1. Las transformaciones afines biyectivas conservan lazos oblicuos.

Demostración.

Sea σ un lazo oblicuo en R^3. Supongamos que $\beta(t) = T(\sigma(t)) = A\sigma(t) + B$ es un lazo no oblicuo. Existen entonces t, s, λ tales que $\dot{\beta}(t) = \lambda\dot{\beta}(s)$. Por lo tanto, $A\dot{\sigma}(t) = \lambda A\dot{\sigma}(s)$, es decir $\dot{\sigma}(t) = \lambda\dot{\sigma}(s)$, lo que contradice lo supuesto.

Lema 1.2. Si τ es la tantrix de un C^2-lazo σ, inmerso en R^3 y $|\sigma(s)| = 1$, entonces $|\dot{\tau}| \geq 1$.

Demostración.

$0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{ds^2}(|\sigma|^2) = \dfrac{1}{2}(2\dot{\sigma}\cdot\dot{\sigma} + 2\sigma\cdot\ddot{\sigma}) = 1 + \dot{\tau}\cdot\sigma$ de la desigualdad de Cauchy - Schwartz

$|\dot{\tau}| = |\dot{\tau}|\,|\sigma| \geq |\dot{\tau}\cdot\sigma| = 1$

Curvatura Geodésica y Gauss-Bonnet

La curvatura geodésica de una C^2-curva sobre una superficie S parametrizada por longitud de arco esta dada por $k_g = \ddot{\sigma} \cdot (\eta \times \dot{\sigma})$, donde η es una aplicación de Gauss. Si $S \subset S^2$es una superficie con borde ∂Ssuave, entonces del teorema de Gauss-Bonnet se tiene

área $(S) = 2\pi - \int_{\partial S} k_g\, ds$ La integral $\int_{\partial S} k_g\, ds$ es llamada curvatura geodésica total

2. Curvas sobre S^2

El siguiente lema es consecuencia inmediata del lema 1.2

Lema 2.1. La tantrix τ de una curva σ inmersa de clase C^2 sobre S^2 también es una curva inmersa en S^2.

Lema 2.2. Sea σ una C^3-curva inmersa en S^2. Si parametrizamos τ por longitud de arco, entonces

(2.2.1) $\ddot{\tau} = k_g\nu - \tau$, donde$\nu = \tau \times \dot{\tau}$

(2.2.2) $\dot{\nu} = -k_g\dot{\tau}$

Demostración.

$\{\tau, \dot{\tau}, \nu\}$ forma una base orientada de R^3y $\{\dot{\tau}, \nu\}$ forma una base del espacio tangente a S^2 en $\tau(t)$.

$$\ddot{\tau} \cdot \dot{\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{\tau}|^2 = 0$$

como $\frac{d^2}{dt^2}(\tau \cdot \tau) = 2\ddot{\tau} \cdot \tau + 2\dot{\tau} \cdot \dot{\tau}$ se tiene $\ddot{\tau} \cdot \tau = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(|\tau|^2) - |\dot{\tau}|^2$=-1, por lo tanto

$\ddot{\tau} = (\ddot{\tau} \cdot \tau)\tau + (\ddot{\tau} \cdot \dot{\tau})\dot{\tau} + (\ddot{\tau} \cdot \nu)\nu = -\tau + k_g\nu$para obtener la segunda igualdad derivamos ν

$$\dot{\nu} = \dot{\tau} \times \dot{\tau} + \tau \times \ddot{\tau} = \tau \times (k_g\nu - \tau) = k_g(\tau \times \nu) = -k_g\dot{\tau}$$

Lema 2.3. Sean σ y τ como en el lema 2.2. Si ϕ es el ángulo entre σ y $-t$ entonces

(2.3.1) $\sigma = -cos\phi(t)\dot{\tau} + sen\phi(t)v(t)$

(2.3.2) $\dot{\sigma} = (\dot{\phi} - k_g)(sen\phi\dot{\tau} + cos\phi v) + cos\phi\tau$

donde t es el parámetro longitud de arco para τ.

Demostración.

Claramente $\sigma \cdot \tau = 0$. De la definición de ϕ, $\sigma \cdot \dot{\tau} = -cos\phi(t)$ y $\sigma \cdot v = \sigma \cdot (\dot{t} \times \tau) = \sigma \cdot (-t \times \tau) = (\sigma \times -t) \cdot \tau = |\sigma \times -t||\tau|cos 0 = sen\phi(t)$. Al reemplazar en la descomposición $\sigma = (\sigma \cdot \tau)\tau + (\sigma \cdot \dot{\tau})\dot{\tau} + (\sigma \cdot v)v$ se llega a la relación (2.3.1).

Para demostrar (2.3.2) derivamos (2.3.1)

$\dot{\sigma} = \dot{\phi}sen\phi\dot{\tau} + cos\phi\ddot{\tau} + \dot{\phi}cos\phi v + sen\phi(-k_g\dot{\tau})$

de esta expresión y el lema 2.2 se deduce fácilmente (2.3.2)

3. Inexistencia de lazos oblicuos sobre elipsoides

El siguiente lema es fundamental para demostrar la no existencia de lazos oblicuos sobre elipsoides.

Lema 3.1. La tantrix de un C^3-lazo inmerso en S^2 tiene curvatura geodésica cero, y si está encajada acota un área de 2π.

Demostración.

Sea s el parámetro longitud de arco para σ. Si t es el parámetro longitud de arco para τ, entonces $t(s) = \int_{s_0}^{s} \left|\frac{d\tau}{d\xi}(\xi)\right| d\xi$, por lo tanto $t'(s) = \left|\frac{d\tau}{ds}\right|$

Del lema 1.2 $\left|\frac{d\tau}{ds}\right| \geq 1$. Por el teorema de la función inversa $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t'(s)} > 0$ y $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = \tau\frac{ds}{dt}$, es decir $\frac{d\sigma}{dt}$ es paralelo a τ, y de la identidad (2.3.2) se deduce $y\dot{\phi} = k_g$.

σ es una curva cerrada, por lo tanto existe un período L tal que

$$0 = \phi(L) - \phi(0) + \int_0^L \phi dt = \int_0^L k_g dt = \int_\tau k_g$$

Si además τ es un encaje, del teorema de Gauss-Bonnet, si S es la región acotada por τ, entonces área $(S) = 2\pi \quad \int_\tau k_g = 2\pi$.

Teorema principal. No existen lazos oblicuos de clase C^3 sobre S^2

Demostración

Sea σ un lazo oblicuo de clase C^3 sobre S^2 con tantrix $\tau = \dot{\sigma}(s)$. De la definición de lazo oblicuo τ y “τ son lazos encajados sin intersecciones sobre S^2. Por el lema 3.1 τ y “τ dividen a S^2 en superficies de igual área. Evidentemente las dos proposiciones no pueden ser ciertas, por lo tanto no existen lazos oblicuos sobre S^2.

Corolario. No existen lazos oblicuos C^3 sobre elipsoides.

Demostración.

Todo elipsoide es una transformación afín de una esfera. Por lo tanto el resultado se deduce del lema 1.1 y del teorema principal.

3. Referencias

[1]. B. Segre. Global differential properties of closed twisted cureves. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 38:256-263, 1968.

[2]. M. Ghomi and B. Solomon. Skew loops and quadric surface. Comment. Math. Hel. 77:767-782, 2002.

[3]. B. Solomon. Tantrices of spherical curves. Amer. Math Monthly, Vol. 103 (1996), 30 - 39.

[4]. O. Montaño. Tantrices de lazos en R3. Lecturas Matemáticas. Vol. 26 (2005), 165 - 170.

[5]. O. Montaño. Inexistencia de lazos oblicuos en el hiperboloide de dos hojas. Tumbaga. Aceptado para publicación.