Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

VERSIÓN CONDICIONADA DE UNA GENERALIZACIÓN DEL LEMA BOREL-CANTELLI

Miguel A. Marmolejo L.
Universidad del Valle

Evelyn Mendoza
Universidad del Valle

Andrés F. Muñoz
Universidad del Valle

Recibido: octubre 20, 2011 Aceptado: diciembre 20, 2011

Pág. 83-92

Resumen

En este artículo se presenta una versión condicionada de la generalización del Lema de Borel-Cantelli debida a Feng, Li y Shen. Este resultado mejora el Lema de Borel-Cantelli, en tanto que implica otras versiones condicionadas que aparecen en la literatura. Para demostrar el resultado principal se da una versión condicionada de la Desigualdad de Chung-Erdös.

Palabras Claves: Probabilidad condicionada, independencia condicionada, desigualdad condicionada de Cauchy-Schwarz, desigualdad condicionada de Chung-Erdös.

Abstract

In this paper we present a conditional version of the generalization of Borel-Cantelli Lemma due to Feng, Li and Shen. Our result is an improvement to the Borel-Cantelli Lemma, since it implies other conditional versions appearing in the literature. In order to get our result we give a conditional version of the Chung-Erdös inequality.

Keywords: Conditional probability, conditional independence, conditional Cauchy-Schwarz inequality, conditional Chung-Erdös inequality.

1 Introducción

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. El límite superior de esta sucesión es el evento definido por la expresión

$$\overline{\lim}\, A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

El Lema de Borel-Cantelli establece:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces $P(\overline{\lim}\, A_n) = 0$;
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ y la sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es independiente, entonces $P(\overline{\lim}\, A_n) = 1$.

Este lema juega un papel importante en la teoría de probabilidad, sobre todo por ser una herramienta de uso frecuente en las demostraciones de resultados que involucran convergencia casi segura de sucesiones de variables aleatorias.

Desde hace más de 50 años aparecen en la literatura trabajos dedicados a la segunda parte de este lema, buscando debilitar la hipótesis de independencia de la sucesión o dando una versión lo más general posible (Chung y Erdös [4]; Erdös y Renyi [5]; Cochen y Stone [2]; Móri y Székely [7]; Ortega y Wschebor [9] y otros). A continuación se mencionan algunos de la última década.

- **Petrov (2002)** [10].

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, entonces vale la implicación:

$$(\exists H \geq 1)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall i \neq j; i \geq N, j \geq N)(P(A_i \cap A_j) \leq HP(A_i)P(A_j))$$

$$\Downarrow$$

$$P(\overline{\lim}\, A_n) \geq \frac{1}{H}.$$

Cuando $H = 1$, se obtiene un resultado debido a Erdös y Renyi [5].

- **Petrov (2004)** [11].

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, entonces se verifica:

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\alpha_H := \underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) - HP(A_i)P(A_j)}{[\sum_{i=1}^{n} P(A_i)]^2})$$

$$\Downarrow$$

$$P(\overline{\lim}\, A_n) \geq \frac{1}{H + 2\alpha_H}.$$

Este teorema implica, en particular, el resultado de Petrov (2002) [10].

- **Yan (2006)** [15].

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, entonces:

$$P(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} P(A_i)]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(A_i \cap A_j)} = \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i)P(A_j)}{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j)}.$$

El teorema principal de Petrov (2004) [11] se presenta aquí como una consecuencia del anterior.

Ahora se da la generalización del Lema de Borel-Cantelli debida a Feng et al. [6]. Es una versión ponderada de la desigualdad que aparece en el resultado anterior.

• **Feng et al. (2009)** [6].

Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n P(A_n) = \infty$, entonces

$$P(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i)]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j P(A_i \cap A_j)}.$$

Obviamente, si $x_n = 1$ para todo $n \in N$, entonces se obtiene la desigualdad del resultado de Yan [15].

En 2005, Majerek et al. [8] introducen la siguiente versión condicionada del Lema de Borel-Cantelli, que seguidamente usan para demostrar versiones condicionadas de la Ley Fuerte de los Grandes Números.

• **Majerek et al. (2005)** [8].

Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathcal{G}) < \infty$ c.s..
2. Si $A := \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathcal{G}) < \infty\}$ es tal que $P(A) < 1$, entonces $P(\overline{\lim}(A_n \cap A)) = 0$
3. Si $A := \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathcal{G}) = \infty\}$ y la sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{G}$-independiente, entonces $P(\overline{\lim}\, A_n) = P(A)$.

De otra parte, en 2009, Prakasa Rao [12] presentó sendas versiones condicionadas de los resultados de Petrov (2004) [11] y de Yan (2006) [15]. De manera explícita, demuestra los siguientes teoremas.

• **Prakasa Rao (2009)** [12].

Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, $A := \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathcal{G}) = \infty\}$ y H una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible, entonces c.s. sobre el evento A:

1. Versión condicionada de la formulación de **Petrov (2004)**:

$$\alpha_H := \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G}) - HP(A_i \mid \mathcal{G})P(A_j \mid \mathcal{G})}{[\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) \geq \frac{1}{H + 2\alpha_H}.$$

2. Versión condicionada de la formulación de **Yan (2006)**:

$$\begin{aligned} P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) &\geq \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})} \\ &= \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \mid \mathcal{G})P(A_j \mid \mathcal{G})}{\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}. \end{aligned}$$

Prakasa Rao también usa el Lema de Borel-Cantelli condicionado para demostrar una versión condicionada de la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Otras versiones condicionadas del lema de Borel-Cantelli aparecen en Chen [3], en Shiryaev [13] y en Williams [14].

El principal objetivo de este trabajo es enunciar y demostrar una versión condicionada de la generalización del Lema de Borel-Cantelli debida a Feng et al. [6]; para ello se usa una versión condicionada de la Desigualdad de Chung-Erdös. La demostración sigue los mismos lineamientos del trabajo de Feng et al..

Además de la introducción, el trabajo contiene dos secciones. En la Sección 2 se da la definición de independencia condicionada y se demuestran versiones condiciondas de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Chung-Erdös. En la Sección 3 se demuestra el teorema objeto de este artículo.

2 Preliminares

En lo que sigue, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Para una variable aleatoria integrable X, $E[X \mid \mathcal{G}]$ indica la esperanza condicionada de X dada $\mathcal{G}$. La probabilidad condicionada de un evento E dada la σ-álgebra $\mathcal{G}$ se define por la expresión $P(E \mid \mathcal{G}) := E[1_E \mid \mathcal{G}]$ (Para una revisión de las propiedades de la esperanza condicionada, ver Billingsley [1], Shiryaev [13] o Williams [14]).

Una sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice condicionalmente independiente dada $\mathcal{G}$ (o $\mathcal{G}$- independiente), si para cada conjunto finito no vacío $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ de $\mathbb{N}$ se cumple:

$$P(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j} \mid \mathcal{G}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j} \mid \mathcal{G}) \;\; c.s..$$

La sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice dos a dos $\mathcal{G}$-independiente, si para todo $i \neq j$ se verifica

$$P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G}) = P(A_i \mid \mathcal{G})P(A_j \mid \mathcal{G}) \;\; c.s..$$

Cuando $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ las nociones de independencia y $\mathcal{G}$-independencia coinciden; pues en este caso, $P(A \mid \mathcal{G}) = P(A)$ c.s..

Teorema 1 (Desigualdad condicionada de Cauchy-Schwarz)

Si X y Y son variables aleatorias cuadrado integrable, entonces

$$(E[XY \mid \mathcal{G}])^2 \leq E[X^2 \mid \mathcal{G}]E[Y^2 \mid \mathcal{G}] \ \ c.s.$$

Demostración. Por la linealidad de la esperanza condicionada, para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$0 \leq E[(tX - Y)^2 \mid \mathcal{G}] = t^2 E[X^2 \mid \mathcal{G}] - 2tE[XY \mid \mathcal{G}] + E[Y^2 \mid \mathcal{G}] \ \ c.s..$$

De esto se sigue la desigualdad propuesta.$\square$.

El siguiente teorema es una versión condicionada de la Desigualdad de Chung-Erdös.

Teorema 2 (Desigualdad condicionada de Chung-Erdös)

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos y $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles; $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

1.

$$(\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G}))^2 \leq P(\cup_{i=1}^{n} A_i \mid \mathcal{G}) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G}) \ \ c.s..$$

2.

$$(\sum_{i=2}^{n} X_1 X_i P(A_1 \cap A_i \mid \mathcal{G}))^2 \leq X_1^2 P(A_1 \mid \mathcal{G}) \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G}) \ \ c.s..$$

Demostración. Para demostrar la primera parte, considere las variables aleatorias $X := 1_{\cup_{i=1}^{n} A_i}$ y $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i 1_{A_i}$. Por la linealidad de la esperanza condicionada y la $\mathcal{G}$-medibilidad de las variables aleatorias X_i; $i = 1, ..., n$, se obtiene:

$$E[XY \mid \mathcal{G}] = E[Y \mid \mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{n} X_i E[1_{A_i} \mid \mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G}),$$

$$E[X^2 \mid \mathcal{G}] = E[1_{\cup_{i=1}^{n} A_i} \mid \mathcal{G}] = P(\cup_{i=1}^{n} A_i \mid \mathcal{G})$$

y

$$E[Y^2 \mid \mathcal{G}] = E[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j 1_{A_i} 1_{A_j} \mid \mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G}).$$

La desigualdad que se quiere demostrar es precisamente la desigualdad condicionada de Cauchy-Schwarz aplicada a las anteriores variables aleatorias.

Para demostrar la segunda parte, se procede de la misma forma empezando con las variables aleatorias $X := X_1 1_{A_1}$ y $Y := \sum_{i=2}^{n} X_i 1_{A_i}$. $\square$.

3 Versión condicionada del teorema de Feng et al.

Para demostrar el teorema central de este artículo se utiliza la desigualdad condicionada de Chung-Erdös y el siguiente lema.

Lema 1 *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles y $A := \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n P(A_n \mid \mathcal{G}) = \infty\}$. Entonces c.s. sobre A:*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=i}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G}) = \infty \tag{1}$$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{i=2}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})} = 1 = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})} \tag{2}$$

Para $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})} = \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=m}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})} \tag{3}$$

Demostración. La hipótesis y la desigualdad condicionada de Chung-Erdös implican la igualdad en (1). Para demostrar las igualdades en (2), teniendo en cuenta la hipótesis y la igualdad (1), basta escribir

$$\frac{\sum_{i=2}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})} = 1 - \frac{X_1 P(A_1 \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})} &= 1 + \frac{X_1^2 P(A_1 \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})} \\ &\quad + 2\frac{\sum_{j=2}^{n} X_1 X_j P(A_1 \cap A_j \mid \mathcal{G})}{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}.\end{aligned}$$

En la anterior expresión, el último sumando tiende a cero cuando n tiende a infinito, en virtud de la segunda parte del Teorema 2. La igualdad en (3) es consecuencia de las igualdades en (2). $\square$

Teorema 3 *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias $\mathcal{G}$-medibles. Entonces c.s. sobre el evento $A := \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n P(A_n \mid \mathcal{G}) = \infty\}$ se verifica la desigualdad:*

$$P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) \geq \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}.$$

Demostración. Por la desigualdad condicionada de Chung-Erdös, la igualdad (3) del lema anterior y el teorema de la convergencia monótona condicionada, c.s. sobre el evento A se cumple :

$$\begin{aligned}
P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) &= P(\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{i=m}^{\infty} A_i \mid \mathcal{G}) \\
&= \lim_{m\to\infty} P(\cup_{i=m}^{\infty} A_i \mid \mathcal{G}) \\
&= \lim_{m\to\infty} [\lim_{n\to\infty} P(\cup_{i=m}^{n} A_i \mid \mathcal{G})] \\
&\geq \lim_{m\to\infty} [\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=m}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}] \\
&= \lim_{m\to\infty} [\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}] \\
&= \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \frac{[\sum_{i=1}^{n} X_i P(A_i \mid \mathcal{G})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j P(A_i \cap A_j \mid \mathcal{G})}. \square
\end{aligned}$$

Observaciones

1. Cada versión condicionada del Lema de Borel-Cantelli implica la correspondiente sin condicionar; pues si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, entonces $P(E \mid \mathcal{G}) = P(E)$ c.s..

2. Si $X_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se obtiene la desigualdad que aparece en la versión condicionada de la formulación del Lema de Borel-Cantelli de Yan [15].

3. Si $X_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es dos a dos $\mathcal{G}$-independiente (en particular; cuando $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de eventos $\mathcal{G}$- independientes), entonces el teorema anterior establece que c.s. sobre el evento $A = \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid \mathcal{G}) = \infty\}$ se verifica $P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) = 1$. De otra parte, c.s. sobre A^c:

$$P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{m=n}^{\infty} A_m \mid \mathcal{G}) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m \mid \mathcal{G}) = 0.$$

   De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) &= P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) 1_A + P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) 1_{A^c} \\
&= P(\overline{\lim}\, A_n \mid \mathcal{G}) 1_A \\
&= 1_A.
\end{aligned}$$

Ahora, la propiedad de la doble esperanza conduce a la igualdad:

$$P(\overline{\lim} A_n) = E[P(\overline{\lim} A_n \mid \mathcal{G})] = E[1_A] = P(A),$$

que corresponde al Lema 3.3 de Majerek et al. [8], mencionado en la introducción.

Ejemplo

Un ejemplo donde se obtiene una igualdad en el teorema anterior es el que sigue. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de los conjuntos borelianos de $[0,1]$ y λ es la medida de Lebesgue. Sea $\mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por la descomposición $\mathcal{D}$ de $[0,1]$ dada por

$$\mathcal{D} := \{[0,1/4), [1/4,1/2), [1/2,3/4), [3/4,1]\}.$$

Para los eventos $E_1 := [1/4,5/8)$ y $E_2 := [3/8,3/4)$ se verifican:

$$P(E_1 \mid \mathcal{G}) = 1_{[1/4,1/2)} + \frac{1}{2} 1_{[1/2,3/4)}, \quad P(E_2 \mid \mathcal{G}) = \frac{1}{2} 1_{[1/4,1/2)} + 1_{[1/2,3/4)},$$

$$P(E_1 \cap E_2 \mid \mathcal{G}) = \frac{1}{2} 1_{[1/4,3/4)} \text{ y } P(E_1 \cup E_2 \mid \mathcal{G}) = 1_{[1/4,3/4)}.$$

Considere ahora la sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ descrita por :

$$E_1, E_2, E_1 \cap E_2, E_1, E_2, E_1 \cap E_2, E_1, E_2, E_1 \cap E_2, ...$$

y la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, ...$$

Por el Teorema 3, c.s. sobre $A := \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n P(A_n \mid \mathcal{G}) = \infty\} = [1/4, 3/4)$ se verifica la desigualdad

$$P(\overline{\lim} A_n \mid \mathcal{G}) \geq P(E_1 \mid \mathcal{G}) + P(E_2 \mid \mathcal{G}) - P(E_1 \cap E_2 \mid \mathcal{G}) = P(E_1 \cup E_2 \mid \mathcal{G}).$$

De hecho, $P(\overline{\lim} A_n \mid \mathcal{G}) = P(E_1 \cup E_2 \mid \mathcal{G})$.

4 Conclusiones

La versión condicionada del Lema de Borel-Cantelli aquí demostrada es, como se estableció en las observaciones, más general que la correspondiente a la formulada por Yan [15] y que la establecida por Majerek et al. [8]. Más aún; el ejemplo dado muestra un caso donde se obtiene igualdad en el resultado principal.

Referencias bibliográficas

[1] Billingsley, P. (1979). Probability and Measure. Jhon Wiley and Sons. Inc., New York.

[2] Cochen, S. and Stone, C. (1964). A note on the Borel-Cantelli Lemma. Illinois J. Math, 8, 248-251.

[3] Chen, L. H. Y. A. (1978). A short note on the conditional Borel-Cantelli Lemma. Ann. Probab., Vol. 6, No. 4, 699-700.

[4] Chung, K. L. and Erdös, A. (1952). On the application of the Borel-Cantelli Lemma. Trans. Amer. Math. Soc., 72 , 179-186.

[5] Erdös, A. and Rényi, A. (1959). On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{n}$. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 2, 93-109.

[6] Feng, C.; Li, L. and Shen, J. (2009). On the Borel-Cantelli Lemma and its generalizations. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I347, 1313-1316.

[7] Móri, T. F. and Székely, G. J. (1983). On the Erdös-Rényi generalization of the Borel-Cantelli Lemma. Studia Sci. Math. Hungar, 18, 173-182.

[8] Majerek, D.; Nowak, W. and Zieba, W. (2005). Conditional Strong Law of Large Number. Int. J. Pure Appl. Math., Vol. 20, No. 2, 143-156.

[9] Ortega, J. and Wschebor, M. (1983). On the sequence of partial maxima of some random sequence. Stochastic Process. Appl., 16, 85-98.

[10] Petrov, V. (2002). A note on the Borel-Cantelli Lemma. Statist. Probab. Lett., 58, 283-286.

[11] Petrov, V. (2004). A generalization of the Borel-Cantelli Lemma. Statist. Probab. Lett., 67, 233-239.

[12] Prakasa Rao, B. L. S. (2009). Conditional independence, conditional mixing and conditional association. Ann. Inst. Stat. Math., 61, 441-460.

[13] Shiryaev, A. N. (1996). Probability. Second Edition. Springer, New York.

[14] Williams, D. (1997). Probability with Martingales. Cambrigdge University Press, Cambridge.

[15] Yan, J. (2006). A simple proof of two generalized Borel-Cantelli Lemmas. In memoriam Paul-André Meyer: Seminar on Probability Theory XXXIX, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1874, 77-79, Springer-Verlag, Berlin.

Dirección de los autores

Miguel A. Marmolejo L.
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
mimarmol@univalle.edu.co

Evelyn Mendoza
Estudiante, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
nateshko@hotmail.com

Andrés F. Muñoz
Estudiante, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
antello05@gmail.com