Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

FUNCIONES MULTIVALUADAS

Diana Ximena Narváez
Universidad del Valle

Guillermo Restrepo
Universidad del Valle

Recibido: agosto 16, 2011 Aceptado: septiembre 20, 2011

Pág. 63-81

Resumen

Una función multivaluada de un conjunto X en un conjunto Y es una relación $f \subseteq X \times Y$. Denotaremos por $f(x)$ al conjunto de los $y \in Y$ tales que $(x, y) \in f$. Una función monovaluada de un conjunto X en un conjunto Y es una relación $f \subseteq X \times Y$ tal que $(x, y) \in f$ y $(x, y') \in f$ implica $y = y'$. Si f es una función multivaluada, es posible que $f(x)$ sea el conjunto vacío. Si X y Y son espacios topológicos, definiremos topologías adecuadas en el conjunto de partes de Y, las llamadas topologías de la semicontinuidad superior e inferior. El propósito de este artículo es estudiar la continuidad de las funciones multivaluadas de X en Y, considerando en el conjunto de partes de Y las topologías anteriormente mencionadas.

Palabras Claves: Funcin multivaluada, Topologas de la Semicontinuidad Superior e Inferior.

Abstract

Multivalued function from a set X into a set Y is a relation $f \subseteq X \times Y$. We denote by $f(x)$ the set of those $y \in Y$ such that $(x, y) \in f$. A singlevalued function from a set X into a set Y is a relation $f \subseteq X \times Y$ such that $(x, y) \in f$ and $(x, y') \in f$ implies $y = y'$. If f is a multivalued function, it is posible that $f(x)$ be the null set. If X and Y are topological spaces, we define apropiate topologies in the set of parts of Y, the so called upper and lower semicontinuos topologies. The purpose of this article is to study the continuity of multivalued functions from X into Y, considering in the set of parts of Y the above mentioned topologies.

Keywords: Multivalued function, upper and lower semicontinuos topologies.

1 Introducción

Si X y Y son conjuntos no vacíos, una *función multivaluada* de X en Y es una relación $f \subseteq X \times Y$. Escribiremos $f : X \to Y$ para indicar que f es una función multivaluada del conjunto X en el conjunto Y. El conjunto $f(x) = \{y \in Y : (x, y) \in f\}$ es la imagen de x. Es posible que $f(x) = \phi$. Las funciones *monovaluadas* (funciones tradicionales o funciones simplemente) de X en Y son aquellas tales que $f(x) \neq \phi$ para todo $x \in X$ y $f(x)$ consta de un sólo elemento. Una función multivaluada $f : X \to Y$ induce una función $\widehat{f} : X \to \mathfrak{P}(Y)$ definida por $\widehat{f}(x) = f(x)$. En lo que sigue identificaremos a $f \subseteq X \times Y$ con la función $\widehat{f}$.

Si $f: X \to Y$ es una función monovaluada, entonces $g: Y \to X$ definida por $g(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ es una función multivaluada denotada por $g = f^{-1}$ y llamada *función inversa* de f. Por ejemplo, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = x^2$, entonces $f^{-1}(y) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$ si $y \geq 0$ y $f^{-1}(y) = \phi$ si $y < 0$; si $f(x) = sen(x)$, entonces $sen^{-1}(y)$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $sen(x) = y$. Si $|y| \leq 1$ y a es una solución particular entonces $sen^{-1}(y) = \{a + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ y $sen^{-1}(y) = \phi$ si $|y| > 1$. Estos ejemplos son importantes, pues marcan el comienzo del estudio de las funciones multivaluadas. Una de las preguntas que se formulan es la que tiene que ver con la continuidad de la función inversa f^{-1} si f es continua. Esta pregunta remite al tema de la estabilidad en el sentido de Hadamard de las soluciones de la ecuación $f(x) = y$, donde y es un dato numérico en un problema concreto. La continuidad es una manera de expresar que las soluciones de una ecuación varían muy poco ante pequeños cambios o perturbaciones de un conjunto de datos relativos al funcionamiento de un sistema. (Ver Aubin y Frankowska[1])

Precisamente, uno de los objetivos de este artículo es mostrar dos procedimientos que se han seguido para definir el concepto de continuidad de una función multivaluada $f: X \to Y$ cuando estos conjuntos son espacios topológicos. El procedimiento seguido por Aubin y Frankowska en [1] es directo. Definen estos autores la semicontinuidad inferior y la semicontinuidad superior de f sin definir topologías en $\mathfrak{P}(Y)$. El procedimiento seguido por Michael en [5] es indirecto. En un apéndice, al final, define las topologías llamadas por él *upper and lower semifinite topologies* y define la continuidad inferior y superior en términos de dichas topologías. Muy someramente relaciona estas definiciones indirectas de continuidad con las definiciones directas tradicionales.

El interés por las funciones multivaluadas cayó en desuso durante la primera mitad del siglo XX, pero el interés se reactivó con el libro de C. Berge [2]. A ello se agregó el auge de las aplicaciones del análisis diferencial e integral de las funciones multivaluadas a una gran variedad de problemas en la teoría de la optimización, el cálculo de variaciones y análisis convexo.

El primer procedimiento en [1] se basa en las definiciones siguientes: Sean X y Y espacios topológicos y $f: X \to Y$ una función multivaluada. Esta función es *semicontinua superiormente en* $a \in X$ si para todo conjunto abierto $W \supseteq f(a)$ existe una vecindad abierta V de a tal que $f(x) \subseteq W$ para todo $x \in V$. Es *semicontinua superiormente* si lo es en cada punto $a \in X$. Es *semicontinua inferiormente* en $a \in X$ si para todo abierto W en Y tal que $f(x) \cap W \neq \phi$, existe una vecindad abierta V de a tal que $f(x) \cap W \neq \phi$ para todo $x \in V$. Es *semicontinua inferiormente* si lo es en cada punto $a \in X$. Resaltamos que el procedimiento directo para el tratamiento de la continuidad de las funciones multivaluadas fué asumido de una manera sistemática por C. Berge en [2].

El segundo procedimiento realizado en [5] muy esquemáticamente en un apéndice, se basa en las definiciones de las topologías σ^* y σ_* en $\mathfrak{P}(Y)$. Si $(T;\tau)$ es un espacio topológico, la σ^*-topología en $\mathfrak{P}(T)$, llamada *topología superior*, es aquella que tiene como base de abiertos la colección $\{A^* : A \in ab(\tau)\}$, donde A^* es la colección de todos los subconjuntos del conjunto abierto A. La σ_*-topología en

$\mathfrak{P}(T)-\{\phi\}$, llamada *topología inferior*, es aquella que tiene como subbase la colección $\{A_* : A \in ab(\tau)\}$, donde A_* es la colección de todos los subconjuntos de T que interceptan al conjunto A. Es claro que una base de abiertos de la topología σ_* es la colección de todos los subconjuntos de T que interceptan simultáneamente a cada conjunto abierto de una colección finita $\{A_k : 1 \le k \le n\}$ de abiertos. Conocidas estas topologías, sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función multivaluada. Esta función es σ^**-continua* si $\widehat{f} : X \to \mathfrak{P}(Y)$ es $(\alpha;\sigma^*)$-continua y es σ_**-continua* si $\widehat{f} : X \to \mathfrak{P}(Y)$ es $(\alpha;\sigma_*)$-continua. Es continua si lo es respecto a cada una de las topologías σ^* y σ_*.

Asumiremos el segundo punto de vista indirecto en este artículo. Demostraremos que estos dos procedimientos son equivalentes: una función multivaluada es semicontinua superiormente si y sólo si es σ^*-continua y es semicontinua inferiormente si y sólo si es σ_*-continua. Es claro que para las funciones monovaluadas estos dos conceptos de continuidad son equivalentes al concepto usual de continuidad.

Desde el punto de vista práctico, si $(T;\tau)$ es un espacio topológico, el conjunto de partes $\mathfrak{P}(T)$ puede ser muy grande y por ello conviene restringir las topologías σ^* y σ_* a la colección $\mathfrak{C}(T)$ de los subconjuntos cerrados de T. Evitaremos el conjunto vacío y escribiremos $\widetilde{\mathfrak{C}}(T) = \mathfrak{C}(T)-\{\phi\}$. Las restricciones de las topologías σ^* y σ_* a $\widetilde{\mathfrak{C}}(T)$ dan origen, respectivamente, a las topologías υ^* llamada *topología superior de Vietoris* y υ_* llamada *topología inferior de Vietoris*, las cuales fueron introducidas por L. Vietoris en [7]. En este contexto es posible demostrar algunos teoremas especiales. Por ejemplo, si T es un espacio de Tychonov, entonces $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(T);\sigma^*\right)$ es un espacio topológico compacto. De especial importancia en este contexto son las funciones usco. Si X y Y son espacios topológicos, una función multivaluada $f : X \to Y$ es una *función usco* si es semicontinua superiormente (σ^*-continua) y $f(x)$ es compacto para todo $x \in X$. Se demostrará que si X es un espacio de Baire y Y es un espacio métrico, entonces f es monovaluada en un conjunto residual.

2 La topología superior σ^* en $\mathfrak{P}(X)$

Si E es un conjunto, una *subbase de vecindades* en E es una función τ que asigna a cada $x \in E$ una colección $\tau(x)$ de subconjuntos de E (vecindades básicas de x) que satisface las propiedades siguientes:

vec1 Si $T \in \tau(x)$, entonces $x \in T$.

vec2 Si T_1 y $T_2 \in \tau(x)$, entonces existe un $T \in \tau(x)$ tal que $T_1 \cap T_2 \supseteq T$.

vec3 Toda $T \in \tau(x)$ contiene una vecindad $W \in \tau(x)$ que es un conjunto τ-abierto. Es decir, para todo $y \in W$, existe un $U \in \tau(y)$ tal que $U \subseteq W$.

Una *topología* en E es una función $x \longmapsto \tau(x)$ de E en $\mathfrak{P}(E)$ que satisface las condiciones que hemos enumerado. Un subconjunto V de E es una *vecindad* de x si contiene a una vecindad básica $T \in \tau(x)$. Un subconjunto A de E es τ*-abierto* si para todo $a \in A$ existe una vecindad V de a tal que $V \subseteq A$. Un subconjunto C de E es τ*-cerrado* si para todo $x \in C^c$ (complemento de C) existe una vecindad $W \in \tau(x)$ tal que $W \cap C = \phi$.

Una *base de vecindades* en el conjunto E es una función $x \longmapsto \tau(x)$ que satisface los axiomas $vec1$, $vec2$ y $vec3$ enumerados anteriormente y el axioma $(vec2)'$ siguiente:

$(vec2)'$ Si T_1 y $T_2 \in \tau(x)$, entonces $T_1 \cap T_2 \in \tau(x)$.

Toda base de vecindades es una subbase.

Sea $(X;\tau)$ un espacio topológico y $\mathfrak{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Para cada conjunto A de X denotaremos por A^* a la colección de todos los subconjuntos de A. Es decir: $A^* = \{T \in \mathfrak{P}(X) : T \subseteq X\}$.

Proposición 2.1. *Si A y B son subconjuntos de X, entonces* $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$.

Demostración. Si $T \in (A \cap B)^*$, entonces $T \subseteq A \cap B$ y por tanto $T \subseteq A$ y $T \subseteq B$, es decir, $T \in A^* \cap B^*$. Esta argumentación es reversible, así que si $T \in A^* \cap B^*$, entonces $T \in (A \cap B)^*$. $\square$

Una *vecindad básica* de $E \in \mathfrak{P}(X)$ es una colección de subconjuntos de X de la forma A^*, donde A es abierto en X y $E \subseteq A$. Denotaremos por $\sigma^*(E)$ a la colección de todas las vecindades básicas de E.

Teorema 2.2. *La función $E \longmapsto \sigma^*(E)$ de $\mathfrak{P}(X)$ en $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ es una base de vecindades.*

Demostración. Demostremos $vec1$. Sea A^* una vecindad de E. Entonces $E \subseteq A$ por la definición de A^* y por tanto $E \in A^*$. La condición $(vec2)'$ se deduce de la proposición (2.1). En efecto, si A^* y B^* son vecindades básicas de E, entonces A y B son abiertos y E está contenido en ambos, lo que significa que $E \subseteq A \cap B$ y $E \in A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$ es una vecindad básica de E. Demostremos $vec3$. Sea A^* una vecindad básica de E. Entonces A es abierto y $E \subseteq A$. Si $B \in A^*$, entonces A es abierto y contiene a B así que A^* es una vecindad de B. Hemos demostrado que A^* es un conjunto σ^*-abierto, lo que demuestra $vec3$. $\square$

Definición 2.3. La topología σ^* definida por la base de vecindades $E \longmapsto \sigma^*(E)$ se llama *topología superior* en $\mathfrak{P}(X)$ (E. Michael en [5; pag. 179] la llama topología semifinita superior). Es claro que esta topología no es hausdorfiana. En efecto, si $E \subset F$, entonces toda vecindad A^* de F es una vecindad de E y por tanto E y F no se pueden separar por vecindades. También es claro que $\sigma^*(\phi) = \{\phi\}$.

Definición 2.4. Sean X y Y conjuntos no vacíos. Una *función multivaluada* de X en Y es una relación $f \subset X \times Y$. Escribiremos $f : X \to Y$ para indicar que f es una función multivaluada del conjunto X en el conjunto Y. El conjunto $f(x) = \{y \in Y : (x, y) \in f\}$ es la *imagen de x*. Es posible que $f(x) = \phi$. Las funciones *monovaluadas* (funciones tradicionales o funciones simplemente) de X en Y son aquellas tales que $f(x) \neq \phi$ para todo $x \in X$ y $f(x)$ consta de un sólo elemento. Una función multivaluada $f : X \to Y$ induce una función $\widehat{f} : X \to \mathfrak{P}(Y)$ definida por $\widehat{f}(x) = f(x)$. En lo que sigue identificaremos a $f \subseteq X \times Y$ con la función $\widehat{f}$.

Definición 2.5. Sean X y Y espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es *semicontinua superiormente* en $x \in X$ si para todo abierto $W \supseteq f(x)$ existe una vecindad abierta V de x tal que $f(z) \subseteq W$ para todo $z \in V$. Es decir, $f(V) \subseteq W$, donde $f(V) = \bigcup_{z \in V} f(z)$. Es semicontinua superiormente si lo es en cada punto x.

Teorema 2.6. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es semicontinua superiormente en $x \in X$ si y sólo si $\widehat{f} : X \to \mathfrak{P}(Y)$ es $(\alpha;\sigma^*)$-continua en x.*

Demostración. Supongamos que f es semicontinua superiormente en $x \in X$ y demostremos que $\widehat{f}$ es $(\alpha;\sigma^*)$-continua. Sea W^* una vecindad básica de $f(x)$. Entonces W es un conjunto abierto que contiene a $f(x)$ y por la definición de semicontinuidad superior, existe una vecindad abierta $V \subseteq X$ de x tal que $f(z) \subseteq W$ para todo $z \in V$, lo que implica que $\widehat{f}(z) \in W^*$ para todo $z \in V$ y por tanto f es $(\alpha;\sigma^*)$-continua. Supongamos ahora que $\widehat{f}$ es $(\alpha;\sigma^*)$-continua y demostremos que f es semicontinua superiormente. Sea W un abierto que contiene a $f(x)$. Entonces W^* es una vecindad de $f(x)$ respecto a la topología σ^* y por continuidad existe una vecindad abierta V de x tal que $\widehat{f}(z) \in W^*$ para todo $z \in V$. Luego $f(z) \subseteq W$ para todo $z \in V$, lo que implica que f es semicontinua superiormente. $\square$

Teorema 2.7. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es $(\alpha;\sigma^*)$-continua si y sólo si para todo conjunto cerrado $C \subseteq Y$,*

$$\{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}$$

es cerrado en X.

Demostración. Supongamos que $\widehat{f}$ es $(\alpha;\sigma^*)$-continua y sea C un subconjunto cerrado de Y. Entonces el conjunto

$$\mathfrak{B}_C = \{E \subseteq Y : E \cap C \neq \phi\}$$

es σ^*-cerrado. Para demostrar este enunciado, sea $A = C^c$. Entonces A es un conjunto abierto en Y y si $B \notin \mathfrak{B}_C$, entonces $B \cap C = \phi$, $B \subseteq A$ y A^* es una vecindad de E. Por otro lado, $A^* \cap \mathfrak{B}_C = \phi$. En efecto, si no fuera vacío, existiría un $T \in A^* \cap \mathfrak{B}_C$, lo que implica que $T \subset A$ y $T \cap C \neq \phi$, lo que es una contradicción. Hemos así demostrado que $\mathfrak{B}_C$ es cerrado. Por la continuidad de f,

$$(\widehat{f})^{-1}(\mathfrak{B}_C) = \left\{x \in X : \widehat{f}(x) \in \mathfrak{B}_C\right\} = \{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}$$

es un conjunto cerrado en X.

Supongamos ahora que $\{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}$ es cerrado en X si C es cerrado en Y y demostremos que $\widehat{f}$ es continua. Sean $x_0 \in X$ y W^* una σ^*-vecindad básica de $\widehat{f}(x_0)$. Entonces W es un conjunto abierto, $f(x_0) \subset W$ y $C = W^c$ es un conjunto cerrado y por hipótesis $\{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}$ es cerrado en X. Ahora,

$$\{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}^c = \{x \in X : f(x) \subset W\}$$

y por consiguiente $(\widehat{f})^{-1}(W^*) = V$ es un conjunto abierto en X y $x_0 \in V$, lo que significa que $\widehat{f}$ es continua. $\square$

De los enunciados anteriores se deduce inmediatamente:

Teorema 2.8. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es semicontinua superiormente si y sólo si para todo conjunto cerrado $C \subset Y$, el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}$$

es cerrado en X.

3 La topología inferior σ_* en $\mathfrak{P}(X) - \{\phi\} = \widetilde{\mathfrak{P}}(X)$

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio topológico $(X;\alpha)$, A_* es la colección de los subconjuntos F de X tales que $A \cap F \neq \phi$ (los F que golpean a A). Es decir,

$$A_* = \{F \in \mathfrak{P}(X) : A \cap F \neq \phi\}.$$

Definición 3.1. Una vecindad básica de $E \in \widetilde{\mathfrak{P}}(X)$, es cualquier conjunto de la forma

$$A_*^1 \cap A_*^2 \cap \ldots \cap A_*^n = \bigcap_{k=1}^{n} A_*^k$$

que contenga a E y donde $\{A_k\}$ es una colección finita de abiertos de X. Es decir, E debe ser uno de los conjuntos que interceptan simultáneamente a todos los A_k. En un lenguaje muy llamativo, se suele decir que una vecindad básica de E determinada por una colección finita $\{A_k\}$ de abiertos es la colección de todos los conjuntos F que golpean a todos los A_k y E debe ser uno de ellos.

Denotaremos por $\sigma_*(E)$ a la colección de todas las vecindades básicas de E.

Teorema 3.2. *Sea $(X;\alpha)$ un espacio topológico. La función $E \longmapsto \sigma_*(E)$ es una base de vecindades en $\widetilde{\mathfrak{P}}(X)$.*

Demostración. Por definición, E pertenece a cualquier vecindad básica de E y por tanto $vec1$ se cumple. Demostremos $(vec2)'$. Sean U y V dos vecindades básicas de E. Si U está determinada por la colección finita $\{A_k\}$ de abiertos y V por la colección finita $\{B_j\}$ de abiertos, entonces

$$U \cap V = \left(\bigcap_{k=1}^{m} A_*^k\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} B_*^j\right)$$

es una vecindad básica de E, pues E intercepta a los A-es y a los B-es simultáneamente. Para demostrar $vec3$ basta demostrar que toda vecindad básica es abierta.

Sea U una vecindad básica determinada por la colección finita de abiertos $\{A_k\}$. Si $T \in U$, entonces T intercepta a cada A_k y por tanto U es una vecindad de T, lo que demuestra que U es abierto. $\square$

Definición 3.3. La topología σ_* en $\widetilde{\mathfrak{P}}(X)$ definida por la base de vecindades $E \longmapsto \sigma_*(E)$ se llama *topología inferior* (E. Michael [5; pag. 179] la llama topología semifinita inferior). Es claro que la topología σ_* no es hausdorfiana pues si $E \subset F$, entonces toda vecindad básica $U = \bigcap_{k=1}^{m} A_*^k$ de E contiene a F.

Definición 3.4. Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es *semicontinua inferiormente* en $x \in X$ si para todo conjunto abierto W en Y tal que $W \cap f(x) \neq \phi$, existe una vecindad abierta V de x tal que $W \cap f(z) \neq \phi$ para todo $z \in V$. Es semicontinua inferiormente si lo es en cada punto $x \in X$.

Teorema 3.5. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es semicontinua inferiormente en $x \in X$ si y sólo si $\widehat{f} : X \to \widetilde{\mathfrak{P}}(Y)$ es $(\alpha;\sigma_*)$-continua.*

Demostración. Supongamos que f es semicontinua inferiormente en $x \in X$ y sea V una vecindad de $\widehat{f}(x)$ determinada por la colección finita $\{W_k\}$ de abiertos. Entonces $\widehat{f}(x) \in \bigcap_k W_*^k \neq \phi$ y por tanto $f(x) \cap W_k \neq \phi$ para todo k. Por la definición de semicontinuidad inferior, existe para cada k una vecindad abierta V_k de x tal que $f(z) \cap W_k \neq \phi$ para todo $z \in V_k$. Sea $V = \bigcap_k V_k$. Entonces V es una vecindad abierta de x y $f(z) \cap W_k \neq \phi$ para todo $z \in V$ y todo k, lo que quiere decir que $\widehat{f}(V) \subset U$ y por tanto $\widehat{f}$ es $(\alpha;\sigma_*)$-continua en $x \in X$. El enunciado recíproco se demuestra de manera similar. $\square$

Teorema 3.6. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es $(\alpha;\sigma_*)$-continua si y sólo si para todo subconjunto abierto W de Y, el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) \cap W \neq \phi\}$$

es abierto en X.

Demostración. Supongamos que f es $(\alpha;\sigma_*)$-continua y sea W un subconjunto abierto en Y. Entonces $W_* = \{E \subset Y : E \cap W \neq \phi\}$ es σ_*-abierto y por continuidad

$$(\widehat{f})^{-1}(W_*) = \left\{x \in X : \widehat{f}(x) \in W_*\right\} = \{x \in X : f(x) \cap W \neq \phi\}$$

es abierto en X. Recíprocamente, si este conjunto es abierto, entonces $(\widehat{f})^{-1}(W_*)$ es abierto. Como $\{W_* : W \text{ abierto en } Y\}$ es una subbase de la topología σ_*, entonces $\widehat{f}$ es $(\alpha;\sigma_*)$-continua. $\square$

De los enunciados anteriores se obtiene inmediatamente el teorema siguiente:

Teorema 3.7. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es semicontinua inferiormente si y sólo si para todo subconjunto abierto W de Y, el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) \cap W \neq \phi\}$$

es abierto en X.

Definición 3.8. Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es *continua* si es continua superiormente e inferiormente.

Denotaremos por σ a la topología generada por los conjuntos σ^*-abiertos y los conjuntos σ_*-abiertos, lo que se escribe a menudo como $\sigma = \sigma^* \vee \sigma_*$.
Los enunciados siguientes se demuestran sin dificultad.

Proposición 3.9. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es continua si y sólo si es $(\alpha;\sigma)$-continua.*

Proposición 3.10. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es continua si y sólo si es $(\alpha;\sigma^*)$-continua y $(\alpha;\sigma_*)$-continua.*

Proposición 3.11. *Sean $(X;\alpha)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es continua si y sólo si satisface las condiciones siguientes:*

(i) Para todo conjunto cerrado C en Y, $\{x \in X : f(x) \cap C \neq \phi\}$ es cerrado en X.

(ii) Para todo conjunto abierto W en Y, $\{x \in X : f(x) \cap W \neq \phi\}$ es abierto en X.

Recordemos que si $(X;d_1)$ y $(Y;d_2)$ son espacios métricos, una función $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a x, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Un teorema similar es válido para las funciones multivaluadas inferiormente semicontinuas.

Definición 3.12. Sea $(Y;d)$ un espacio métrico y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos. Diremos que y es un *punto límite* de esta sucesión de conjuntos si $y \in \bigcap_n \overline{\bigcup_{k\geq n} E_k}$. Es inmediato que $y \in \bigcap_n \overline{\bigcup_{k\geq n} E_k}$ si y sólo si existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in E_n$ y y es un punto límite de esta sucesión.

Teorema 3.13. *Sean $(X;d_1)$ y $(Y;d_2)$ espacios métricos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es semicontinua inferiormente en $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a x, todo $y \in f(x)$ es un punto límite de la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos.*

Demostración. Supongamos que f es semicontinua inferiormente en $x \in X$ y sea $y \in f(x)$. Si $B_n = \left\{z \in Y : d_2(y,z) < n^{-1}\right\}$, entonces $W_n = (B_n)_*$ es una σ_*-vecindad de $f(x)$ y por la semicontinuidad inferior de f, existe una vecindad abierta V_n de x tal que $x' \in V_n$ implica $\widehat{f}(x') \in W_n$, es decir, $f(x') \cap B_n \neq \phi$. Como $x_n \to x$, existe un k_n tal que $j \geq k_n$ implica que $x_j \in V_n$. Podemos escoger los k_n de modo que $k_1 < k_2 < \ldots$ etc. Como $f(x_{k_n}) \cap B_n \neq \phi$, existe un $y_{k_n} \in f(x_{k_n}) \cap B_n$. Es claro que $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in f(x_n)$.

Demostremos el enunciado recíproco. Supongamos que bajo las hipótesis indicadas en el enunciado del teorema, la función indicada no es semicontinua inferiormente. Entonces para algún $x \in X$ existe una vecindad $W = A_*$ de $f(x)$ tal que para toda vecindad abierta V de x, $\widehat{f}(x') \notin W$ para algún $x' \in V$, es decir, $f(x') \cap A = \phi$. Sean $V_n = \left\{w \in X : d_1(x, y) < n^{-1}\right\}$, $x_n \in V_n$ tal que $f(x_n) \cap A = \phi$ y $w \in A \cap f(x)$. Es claro que $x_n \to x$ pero y no es un punto límite de la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos. $\square$

4 La continuidad de las funciones multivaluadas compuestas

Definición 4.1. Si $f : X \to Y$ es una función multivaluada y E es un subconjunto de X, la *imagen* de este conjunto por f es el conjunto $f(E) = \bigcup_{x\in E} f(x)$. Si E es un subconjunto de Y, la imagen inversa de E es el conjunto $f^{\bullet}(E) = \{x \in X : f(x) \cap E \neq \phi\}$.

Definición 4.2. Sean X, Y y Z conjuntos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones multivaluadas. La *función compuesta* $h : X \to Z$ de estas funciones es la función $x \mapsto g(f(x)) = h(x)$. Denotaremos por $g \circ f$ a la función compuesta de f y g.

Lema 4.3.
$$(g \circ f)^{\bullet}(E) = f^{\bullet}(g^{\bullet}(E)) \text{ para todo } E \subseteq Z.$$

Demostración. Sean $h = g \circ f$ y $x \in h^{\bullet}(E)$. Entonces $h(x) \cap E \neq \phi$ y como $h(x) = \bigcup_{y\in f(x)} g(y)$, entonces $g(\overline{y}) \cap E \neq \phi$ para algún $\overline{y} \in f(x)$. Como $g^{-1}(E) = \{y \in Y : g(y) \cap E \neq \phi\}$, entonces $\overline{y} \in g^{\bullet}(E)$ y por consiguiente $f(x) \cap g^{\bullet}(E) \neq \phi$, lo que significa que $x \in f^{\bullet}(g^{\bullet}(E))$. Recíprocamente, supongamos que $x \in f^{\bullet}(g^{\bullet}(E))$. El argumento anterior es reversible y concluimos que $x \in h^{\bullet}(E)$. $\square$

Teorema 4.4. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones multivaluadas,*

1) Si f y g son semicontinuas superiormente, entonces $g \circ f$ es semicontinua superiormente.

2) Si f y g son semicontinuas inferiormente, entonces $g \circ f$ es semicontinua inferiormente.

3) Si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Demostración. Para demostrar 1, utilizaremos el teorema 2.7. Si C es un subconjunto cerrado de Z, entonces $g^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de Y y $f^{\bullet}(g^{\bullet}(C)) = (g \circ f)^{\bullet}(C)$ es un subconjunto cerrado de X. Para demostrar 2 utilizaremos el teorema 3.7. Si W es un subconjunto abierto de Z, entonces $g^{-1}(W)$ es un subconjunto abierto de Y y $f^{\bullet}(g^{\bullet}(W)) = (g \circ f)^{\bullet}(W)$ es un subconjunto abierto de X. La demostración 3 se deduce de las anteriores. $\square$

5 Las topologías υ^* y υ_* de Vietoris

En esta sección consideramos la colección $\mathfrak{C}(X)$ de los conjuntos cerrados de un espacio topológico X y la colección $\widetilde{\mathfrak{C}}(X) = \mathfrak{C}(X) - \{\phi\}$. Las topologías de Vietoris υ^* y υ_*, son las topologías σ^* y σ_* restringidas a $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$. En esta sección analizaremos los axiomas de separación para las topologías de Vietoris.

Definición 5.1. Un *espacio de Tychonov* es un espacio topológico $(X;\tau)$ que satisface el axioma T_1 de separación y es completamente regular.

Observaciones 5.2. Sea $(X;\tau)$ un espacio topológico. El axioma T_0 expresa que dados dos puntos distintos en X, uno de ellos posee una vecindad que no contiene al otro. El axioma T_1 expresa que dados dos puntos diferentes de X, cada uno de ellos posee una vecindad que no contiene al otro. Este axioma es equivalente a la afirmación que $\{x\}$ es un conjunto cerrado para cada $x \in X$. El axioma T_2 llamado *axioma de Hausdorff* expresa que dos puntos distintos se pueden separar por respectivas vecindades abiertas. Es claramente un axioma más fuerte que el axioma T_1 y éste un axioma más fuerte que T_0. Un espacio topológico $(X;\tau)$ es *completamente regular* si para toda pareja (a, C), donde C es un conjunto cerrado y $a \notin C$, existe una función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) = 1$ y $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in C$ (Ver [3; p.153]). Si $(X;\tau)$ es un espacio topológico completamente regular, entonces un conjunto cerrado C y un punto a que no pertenezca a C se pueden separar por conjuntos abiertos.

Definición 5.3. Sean $(X;\tau)$ un espacio topológico y $\widetilde{\mathfrak{C}}(X) = \mathfrak{C}(X) - \{\phi\}$ (colección de los conjuntos cerrados sin el conjunto vacío). La *topología superior de Vietoris* en $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$ es la topología σ^* restringida a $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$. La *topología inferior de Vietoris* es la topología σ_* restringida a $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$.

Nos remitimos a las definiciones de σ^* y σ_* para concluir lo siguiente:

1) Una υ^*-vecindad básica de un subconjunto cerrado E no vacío es la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos contenidos en un conjunto abierto A que contenga a E. Si A es abierto, escribiremos

$$A^* = \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \subseteq A\right\}.$$

La función

$$E \mapsto \{A^* : A \in ab(X) \text{ y } E \subset A\}$$

es una base de vecindades de la topología superior de Vietoris.

2) Una υ_*-vecindad básica de un subconjunto cerrado E no vacío es la colección de todos los subconjuntos cerrados que interceptan a una colección finita $\{A_k\}$ de abiertos, entre los cuales se cuenta E. Si $\{A_k\}$ es una colección finita de conjuntos abiertos, escribiremos

$$\{A_k\}_* = \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \cap A_k \neq \phi \text{ para todo } k\right\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{U}$ al conjunto de todas las colecciones finitas de abiertos. La función

$$E \mapsto \{\{A_k\}_* : \{A_k\} \in \mathcal{U} \text{ y } E \in \{A_k\}_*\}$$

es una base de vecindades de la topología inferior de Vietoris.

Teorema 5.4. *Si $(X;\tau)$ es un espacio de Tychonov, entonces $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X); \upsilon^*\right)$ es un espacio topológico que satisface el axioma T_0 pero no satisface el axioma T_1.*

Demostración. Demostremos que $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X); \upsilon^*\right)$ satisface el axioma T_0. Sean $E, F \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X)$ subconjuntos cerrados diferentes. Entonces existe un $x \in X$ tal que $x \in E$ pero $x \notin F$ ó $x \notin E$ pero $x \in F$. Consideremos el primer caso. Como $(X;\tau)$ es un espacio de Tychonov, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$. Por consiguiente $F \in V^*$ y $E \notin V^*$. Una demostración similar es válida en el segundo caso. Demostremos que $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X); \upsilon^*\right)$ no satisface el axioma T_1. Sean $E, F \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X)$ tales que $E \subset F$ (subconjunto propio). Entonces existe un x en F que no pertenece a E. Como $(X;\tau)$ es un espacio de Tychonov, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$, $E \subseteq V$ y por tanto $E \in V^*$ pero $F \notin V^*$.

Es decir, podemos separar E de F. Por otro lado, toda υ^*-vecindad de F es una υ^*-vecindad de E y por consiguiente no es posible separar a F de E. En resumen, $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X); \upsilon^*\right)$ no satisface el axioma T_1. □

Teorema 5.5. *Sea $(X;\tau)$ un espacio de Tychonov y E un subconjunto cerrado no vacío.*

1) La adherencia de $\{E\}$ respecto a la topología υ^* es el conjunto de los subconjuntos cerrados de X que contienen a E. Es decir,

$$adh_{\upsilon^*}(\{E\}) = \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \supseteq E\right\}.$$

2) La adherencia de $\{E\}$ respecto a la topología υ_* es la colección de los subconjuntos cerrados de X que están contenidos en E. Es decir,

$$adh_{\upsilon_*}(\{E\}) = \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \subseteq E\right\}.$$

Demostración. Demostremos 1. Empezaremos demostrando que

$$adh_{\upsilon^*}(\{E\}) \subseteq \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \supseteq E\right\}.$$

Sea $C \in adh_{\upsilon^*}(\{E\})$ y supongamos que C no contiene a E, es decir, existe un $x \in E$ tal que $x \notin C$. Como $(X;\tau)$ es un espacio de Tychonov, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $C \subset V$. Luego $C \in V^*$ y por hipótesis se debería tener que $V^* \cap \{E\} \neq \phi$, es decir, $E \in V^*$ y $E \subset V$, lo que es una contradicción porque $x \notin V$. Demostraremos ahora que

$$adh_{\upsilon^*}(\{E\}) \supseteq \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \supseteq E\right\}.$$

Sean C un subconjunto tal que $C \supseteq E$ y V^* una σ^*-vecindad de C. Entonces V es abierto y $E \subseteq C \subseteq V$, lo que significa que $E \in V^*$ y por tanto $V^* \cap \{E\} = \{E\} \neq \phi$ y $C \in adh_{\upsilon^*}(\{E\})$.

Demostremos 2. En primer lugar demostraremos que

$$adh_{\upsilon_*}(\{E\}) \subseteq \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \subseteq E\right\}.$$

Sea $C \in adh_{\upsilon_*}(\{E\})$. Demostrar que $C \subseteq E$ es lo mismo que demostrar que $C \cap E^c = \phi$, lo cual haremos por contradicción. Observemos que $V = E^c$ es un conjunto abierto y supongamos que $V \cap C \neq \phi$. Por tanto, V_* es una σ_*-vecindad de C y por hipótesis $V_* \cap \{E\} \neq \phi$, lo que implica que $E \in V_*$ y por tanto $E \cap V = E \cap E^c \neq \phi$, lo que es una contradicción. En segundo lugar demostraremos que

$$adh_{\upsilon_*}(\{E\}) \supseteq \left\{C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X) : C \subseteq E\right\}.$$

Supongamos que $C \subseteq E$ y consideremos una vecindad básica $\{A_k\}_*$ de C. Entonces $C \cap A_k \neq \phi$ para todo k y con mayor razón $E \cap A_k \neq \phi$ para todo k, lo que significa que $E \in \{A_k\}_*$. Hemos así demostrado que $C \in adh_{\upsilon_*}(\{E\})$. □

Teorema 5.6. *Sea $(X;\tau)$ un espacio de Tychonov.*

1) *El único punto de $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right)$ que es cerrado es X.*

2) *$\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right)$ es compacto y conexo.*

3) *Las únicas funciones continuas de $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right)$ en un espacio topológico $(Y;\beta)$ que satisface el axioma T_1 son las funciones constantes.*

Demostración. La parte 1 de este teorema se deduce de la parte 1, del teorema 5.5.

Demostremos la parte 2. Sea $\Gamma = \{\gamma\}$ una colección de subconjuntos cerrados y no vacíos de $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$ y para cada γ sea $E_\gamma \in \gamma$. Como $X \in adh_{\upsilon^*}(\{E_\gamma\})$ por 5.5.1 y $adh_{\upsilon^*}(\{E_\gamma\}) \subseteq adh_{\upsilon^*}(\gamma) = \gamma$ por ser cerrado este conjunto, entonces $X \in \gamma$ para todo γ y por tanto $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma \neq \phi$. Esto demuestra que $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right)$ es compacto. Para demostrar que $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right)$ es conexo, recordemos que un espacio topológico $(S;\beta)$ es desconexo si existe un conjunto no vacío $D \subset S$ que es cerrado y abierto al mismo tiempo. Argumentemos por contradicción suponiendo que $\left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right)$ es desconexo. Entonces existe un subconjunto no vacío $\gamma \subset \widetilde{\mathfrak{C}}(X)$ que es cerrado y abierto. Sea $E \in \gamma$. Como E es cerrado, entonces $X \in adh_{\upsilon^*}(\{E\}) \subseteq adh(\{\gamma\}) = \gamma$ por ser cerrado este conjunto. Como γ es un subconjunto propio de $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$, entonces $\gamma^c \neq \phi$. Sea $F \in \gamma^c$. Como este conjunto es abierto y cerrado, entonces $X \in adh_{\upsilon^*}(\{F\}) \subseteq adh(\{\gamma^c\}) = \gamma^c$. En suma, $X \in \gamma$ y $X \in \gamma^c$, lo que es una contradicción.

Demostremos la parte 3. Sea $f : \widetilde{\mathfrak{C}}(X) \to Y$ una función continua y supongamos que no es una función constante. Entonces existen E y $F \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X)$, tales que $a = f(E) \neq f(F) = b$. Como Y satisface el axioma T_1, entonces $\{a\}$ y $\{b\}$ son conjuntos cerrados y como f es continua, entonces

$$f(adh(\{E\})) \subseteq adhf(E) = adh(\{a\}) = \{a\}$$
$$f(adh(\{F\})) \subseteq adhf(F) = adh(\{b\}) = \{b\}.$$

Como X pertenece a las adherencias de $\{E\}$ y de $\{F\}$, entonces $f(X) = a = b$, lo que es una contradicción. □

Teorema 5.7. *Sea $(X;\tau)$ un espacio de Tychonov. Entonces la función*

$$J : (X;\tau) \to \left(\widetilde{\mathfrak{C}}(X);\upsilon^*\right) \text{ definida por } J(x) = \{x\}$$

es un homeomorfismo de X sobre $J(X)$ que es un subespacio denso de $\widetilde{\mathfrak{C}}(X)$.

Demostración. La función J es inyectiva claramente. Demostremos que J es continua. Sea W^* una vecindad de $\{x\}$. Entonces W es un conjunto abierto y $x \in W$, es decir, W es una vecindad de x y $J(W) \subseteq W^*$. Como $J^{-1}(\{x\}) = x$, es inmediato que $J^{-1}\big|\, J(X)$ es continua.

Demostremos que $J(X)$ es un subespacio denso. Sea $C \in \widetilde{\mathfrak{C}}(X)$. Como $C \notin \phi$, existe un $x \in C$ y si V^* es una vecindad de C, entonces $C \subseteq V$, $x \in V$ y $V^* \cap J(X) \neq \phi$. □

6 Las funciones usco

Son las funciones multivaluadas semicontinuas superiormente $f : X \to Y$ tales que $f(x)$ es compacto para cada $x \in X$. Cuando X es un espacio métrico completo y Y es un espacio métrico, estas funciones son monovaluadas en el complemento de un conjunto denso. Este enunciado se demostrará en esta sección. Las funciones usco son utilizadas sistemáticamente por M. Fabian en [4] en el estudio de los espacios de Asplund.

Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. En el conjunto de las funciones multivaluadas de X en Y definiremos la relación

$$f \preceq g \text{ si } f(x) \subseteq g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Es fácil ver que ésta es una relación de orden parcial en el conjunto de todas las funciones multivaluadas.

Definición 6.1. Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es una *función usco* si es semicontinua superiormente y $f(x)$ es compacto y no vacío para todo $x \in X$.

Denotaremos por $\mathcal{U}(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones usco de X en Y. Es claro por el teorema 2.6 que $f \in \mathcal{U}(X,Y)$ si y sólo si es $(\alpha;\sigma^*)$-continua y $f(x)$ es compacto para cada $x \in X$.

Definición 6.2. Una función usco $f \in \mathcal{U}(X,Y)$ es *minimal* si es un elemento minimal del conjunto ordenado $(\mathcal{U}(X,Y);\preceq)$. Es decir, si $g \in \mathcal{U}(X,Y)$ y $g \preceq f$, entonces $f = g$.

Lema 6.3. *Sea $u \in \mathcal{U}(X,Y)$ y $\{f_t : t \in T\}$ una cadena de funciones usco tal que $f_t \preceq u$ para todo t. Sea $g(x) = \bigcap_t f_t(x)$ para todo $x \in T$. Si $g(x)$ es compacto y no vacío para cada x, entonces g es semicontinua superiormente.*

Demostración. Sean $a \in X$ y $G \subset Y$ un conjunto abierto tal que $f(a) \subset G$. Entonces $f_s(a) \subset G$, para algún s porque $\{f_t : t \in T\}$ es una cadena y por la compacticidad de $f_t(x)$ para todo t. Como f_s es semicontinua superiormente, existe una vecindad V de a tal que $f_s(x) \subset G$ para todo $x \in X$ y por consiguiente $g(x) \subseteq f_s(x) \subset G$ para todo $x \in T$. $\square$

Teorema 6.4. *Para toda $u \in \mathcal{U}(X,Y)$, existe una función usco minimal f tal que $f \preceq u$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la colección de todas las funciones usco h tales que $h \preceq u$. Demostremos que toda cadena $\mathcal{L}$ contenida en $\mathcal{H}$ es minorada. Si $\mathcal{F}$ es un subconjunto finito en $\mathcal{L}$, entonces $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} f(x)$ es un subconjunto cerrado y no vacío contenido en el conjunto compacto $u(x)$ ya que podemos ordenar a $\mathcal{F}$ linealmente. Luego $\bigcap_{h\in\mathcal{L}} h(x)$ es un conjunto cerrado y no vacío contenido en el conjunto compacto $u(x)$ y es por tanto compacto. Aplicamos el lema a la cadena $\{h : h \in \mathcal{L}\}$ para concluir que $x \mapsto g(x) = \bigcap_{h\in\mathcal{L}} h(x)$ es semicontinua superiormente, y así una función usco que minora a $\mathcal{L}$. Por el lema de Zorn $\mathcal{H}$ posee elementos minimales. $\square$

Definición 6.5. Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. La gráfica de una función multivaluada $f : X \to Y$ es el subconjunto $G(f)$ de $X \times Y$ de las parejas $(x;y) \in X \times Y$ tales que $y \in f(x)$. Es decir,

$$G(f) = \{(x;y) \in X \times Y : y \in f(x)\}.$$

Definición 6.6. Los *valores límite* de una red $(y_t)_{t\in T}$ en un espacio topológico $(Y;\beta)$ son los elementos del conjunto

$$v.l\,(y_t)_{t\in T} = \bigcap_{t\in T} \overline{\{y_s : s \succeq t\}}.$$

Es fácil ver que y es un $v.l$ de la red indicada si y sólo si existe una subred que converge a y.

Lema 6.7. *Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función usco. Si $(x_t, y_t)_{t\in T}$ es una red en $G(f)$ y $x_t \to x$, entonces $(y_t)_{t\in T}$ tiene por lo menos un $v.l$ en $f(x)$.*

Demostración. Argumentemos por contradicción suponiendo que la red $(y_t)_{t\in T}$ no tiene valores límites en $f(x)$. Es decir, para todo $z \in f(x)$, existe un t_z tal que $z \notin \overline{\{y_s : s \succeq t_z\}}$. Sea W_z una vecindad abierta de z tal que $W_z \cap \overline{\{y_s : s \succeq t_z\}} = \phi$. Como $f(x)$ es compacto, existe un subconjunto finito $F \subseteq f(x)$ tal que $f(x) \subseteq \bigcup_{z\in F} W_z = A$. Por la continuidad de f respecto a la σ^*-topología, existe un $\overline{t}$

tal que $f(x_t) \in A^*$ si $t \succeq \bar{t} \succeq \sup\{t_z : z \in F\}$. Sea $t \succeq \bar{t}$. Entonces $f(x_t) \subseteq A$, $(x_t, y_t) \in \overline{G(f)}$, $y_t \in f(x_t)$, $y_t \in A$ y $y_t \in W_z$ para algún $z \in F$, lo que implica que $W_z \cap \{y_s : s \succeq t_z\} \neq \phi$, lo que es una contradicción. □

Teorema 6.8. *Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos. Una función multivaluada $f : X \to Y$ es una función usco si y sólo si su gráfica $G(f)$ es un conjunto cerrado y existe una función usco $u \in \mathcal{U}(X,Y)$ tal que $f \preceq u$.*

Demostración. Supongamos que f es una función usco y demostremos que si $(x, y) \in \overline{G(f)}$, entonces $(x, y) \in G(f)$, es decir, $y \in f(x)$. Existe una red $(x_t, y_t)_{t\in T}$ tal que $x_t \to x$, $y_t \to y$ y $y_t \in f(x_t)$. Por el lema anterior, $(y_t)_{t\in T}$ tiene por lo menos un valor de adherencia en $f(x)$. Es decir, existe una subred $(y_{t_s})_{s\in S}$ tal que $y_{t_s} \to y' \in f(x)$ y por la unicidad de los límites, $y = y' \in f(x)$. Es claro que $f \preceq u = f$.
Demostraremos el enunciado recíproco: si $G(f)$ es cerrado y existe una función usco u tal que $f \preceq u$, entonces f es una función usco. Por el lema 6.3 basta demostrar que $f(x)$ es cerrado para todo $x \in X$. Sea $y \in \overline{f(x)}$ y demostraremos que $y \in f(x)$.
Entonces existe una red $(y_t)_{t\in T}$ en $f(x)$ tal que $y_t \to y$. Sea $x_t = x$ para todo $t \in T$. Entonces $(x_t, y_t)_{t\in T}$ es una red en $G(f)$ que cumple las condiciones del lema 6.7 y por tanto una subred $(y_t)_{t\in T}$ converge a $y' \in f(x)$ y como $y_t \to y$, se deduce que $y' = y \in f(x)$. □

Nos proponemos demostrar que las funciones usco minimales son monovaluadas en el complemento de un conjunto denso en el contexto de los espacios métricos. En este orden de ideas el lema siguiente es básico.

Lema 6.9. *Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función usco minimal. Entonces para todo conjunto abierto A de X y todo subconjunto abierto W de Y tales que $f(a) \cap W \neq \phi$ para algún $a \in A$, existe un subconjunto abierto no vacío $V \subseteq A$ tal que $f(x) \subseteq W$ para todo $x \in V$.*

Demostración. Todo consiste en demostrar que existe un $a_0 \in A$ tal que $f(a_0) \subseteq W$. Si esto es cierto, entonces W^* es una σ^*-vecindad de $f(a_0)$ y por la semicontinuidad superior de f, existe una vecindad abierta V de a_0 contenida en A tal que $\widehat{f}(V) \subseteq W^*$, es decir, $f(x) \subseteq W$ para todo $x \in V$.
Demostremos pues que existe un $a_0 \in A$ tal que $f(a_0) \subseteq W$. Sea $C = W^c$ y supongamos que este enunciado es falso. Entonces $f(a) \cap C \neq \phi$ para todo $a \in A$. Definamos la función $h : X \to Y$ por la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \cap C & \text{si } x \in A \\ f(x) & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

Es claro que $h(x) \neq \phi$, y es cerrado para todo $x \in X$ y $h \preceq f$. Luego, por el lema 6.3, h es una función usco. Como f es minimal por hipótesis, entonces $h = f$ y por consiguiente $h(a) = f(a) \subseteq C$ para todo $a \in A$. Esto es una contradicción porque $f(a_0) \subseteq W$. □

Definición 6.10. Sea $(X;\tau)$. Un subconjunto R de X es *residual* si es la intersección de una familia numerable $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos y densos. Recordemos que un subconjunto D de un espacio topológico es denso si $\overline{D}$ (adherencia de D) es igual a X. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable y denso en $\mathbb{R}$ pero $\mathcal{J}$ (irracionales) no es numerable, pero sí es denso. Este conjunto es un conjunto residual. En efecto, $\mathcal{J} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}^c$.

Definición 6.11. Un $(X;\tau)$ espacio topológico es un *espacio de Baire* si todo subconjunto residual es denso. Es claro que $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire. Los teoremas siguientes son bien conocidos (ver [3; p.61]):

1) Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire.

2) Todo subconjunto abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire.

3) Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

Teorema 6.12. *Sean $(X;\tau)$ un espacio de Baire y $(Y;d)$ un espacio métrico. Entonces toda función usco minimal de X en Y es monovaluada en algún subconjunto residual de X.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función usco minimal. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto V tal que $dm\,(f\,(V)) < \epsilon$ (diámetro de $f\,(V)$ menor que ϵ).

Para demostrar esta afirmación, sean $y \in f\,(X)$ y W la bola abierta de centro y y radio $\frac{\epsilon}{2}$. Existe por lo menos un $a \in X$ tal que $f\,(a) \cap W \neq \phi$, pues de lo contrario $f\,(x) \subseteq W^c$ para todo $x \in X$. Por el lema 6.7, existe un conjunto abierto V en X tal que $f\,(x) \subseteq W$ para todo $x \in V$ y por consiguiente $dm\,(f\,(V)) < \epsilon$. Sea A_ϵ la unión de todos los conjuntos abiertos V tales que $dm\,(f\,(V)) < \epsilon$. Es claro que este conjunto es abierto. Demostremos que es denso. Sean $x \in X$ y U una vecindad abierta de x. Si $y \in f\,(x)$ y W es la bola de centro y y radio $\frac{\epsilon}{2}$, entonces $f\,(x) \cap W \neq \phi$ y nuevamente por el lema 6.7, existe un abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $f\,(v) \subseteq W$ para todo $v \in V$, es decir, $dm\,(f\,(V)) < \epsilon$ y por consiguiente $V \subseteq A_\epsilon$. Hemos demostrado que $U \cap A_\epsilon \neq \phi$.
Si $\epsilon = n^{-1}$, escribiremos A_n en vez de $A_{\frac{1}{n}}$. Entonces $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección numerable de subconjuntos abiertos y densos en X. Como éste es un espacio de Baire, la intersección R de ellos es un subconjunto residual denso. Si $x \in R$, entonces $dm\,(f\,(x)) < n^{-1}$ para todo n, y por tanto $f\,(x)$ consta de un sólo elemento. Es decir, $f|_R$ es una función monovaluada. $\square$

Observación 6.13. Denotaremos por $\mathcal{G}$ a la clase de los espacios topológicos Y completamente regulares que satisfacen la condición siguiente:

Si X es un espacio de Baire y $f : X \to Y$ es una función usco minimal, entonces f es monovaluada en un subconjunto residual de X.

El teorema 6.12 expresa, desde este punto de vista, que los espacios métricos pertenecen a la clase $\mathcal{G}$. En el ejemplo 7.6 mostraremos un conjunto especial de espacios topológicos que pertenecen a la clase $\mathcal{G}$.

7 Algunos Ejemplos

En esta sección presentaremos diversos ejemplos concretos relacionados con el tema de las funciones multivaluadas.

Ejemplo 7.1. Sean $(X;\tau)$ y $(Y;\beta)$ espacios topológicos y $g_k : X \to Y$ funciones monovaluadas continuas, donde $1 \leq k \leq n$. Supondremos que $g_k(x) \neq g_j(x)$ si $j \neq k$. Entonces $G : X \to Y$ definida por $G(x) = \{g_k(x) : 1 \leq k \leq n\}$ es una función multivaluada continua. En efecto, si W es un abierto que contiene a $G(x)$, existe para cada k una vecindad V_k de x tal que $g_k(V_k) \subset W$ y si $V = \bigcap_k V_k$, entonces V es una vecindad de x y $G(V) \subseteq W$.

Ejemplo 7.2. La función inversa de $y = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es la función

$$g(x) = \begin{cases} \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \phi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Esta función es semicontinua superiormente e inferiormente en todo punto y por tanto es continua.

Ejemplo 7.3. Sea $g(y) = \{x : senx = y\} = sen^{-1}(y)$. Es claro que $g(y) = \phi$ si $|y| > 1$. Se comprueba sin dificultad que esta función no es semicontinua superiormente si $|y| \leq 1$ y es semicontinua superiormente si $|y| > 1$.

Ejemplo 7.4. Existen funciones que son semicontinuas superiormente y que no son semicontinuas inferiormente. El siguiente ejemplo se propone sin demostración en J-Aubin y Frankowska [1; p.39]. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$g(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \neq 0 \\ [-1,1] & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es semicontinua superiormente en $x = 0$. En efecto, si W^* es una σ^*-vecindad de $g(0) = [-1,1] = E$, entonces $E \subset W$ y si $V = \{x : |x| < \epsilon\}$ donde $\epsilon < 1$, entonces $g(V) \subset W$. Pero esta función no es semicontinua inferiormente en $x = 0$. Sea W_* una σ_*-vecindad de E, donde $W = \{x : 0 < |x| < r\}$ (este conjunto es abierto y $E \cap W \neq \phi$). Sea $V_\epsilon = \{x : |x| < \epsilon\}$. Entonces $\widehat{g}(x) \notin W_*$ si $x \in V$ y $x \neq 0$ para todo $\epsilon > 0$ y por tanto g no es semicontinua inferiormente en cero.

Ejemplo 7.5. Existen funciones que son semicontinuas inferiormente y que no son semicontinuas superiormente. El siguiente ejemplo se propone sin demostración en J-Aubin y Frankowska [1; p.39]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es semicontinua inferiormente en $x = 0$. Para demostrar esta afirmación, sea $W = \{A_k\}_*$ una σ_*-vecindad de $\{0\}$, donde A_k es un conjunto abierto para todo k tal que $1 \leq k \leq n$. Como $\{0\} \in W$, entonces $\{0\} \cap A_k \neq \phi$ y por tanto $0 \in A_k$ para todo k.

Ejemplo 7.6. (Ver [4; Chapter 3]). Este ejemplo es para señalar la importancia de las funciones usco en el tema de la diferenciación de las funciones convexas en los espacios de Banach.
Sea Ω un subconjunto convexo y abierto de un espacio de Banach real E. El *subdiferencial* de la función convexa $f:\Omega\to\mathbb{R}$ en el punto $a\in\Omega$ es el conjunto de las formas lineales continuas $u\in E'$ (dual topológico de E) tales que

$$f(x)-f(a)\geq u(x)-u(a)=u(x-a)\ \text{ para todo } x\in\Omega.$$

Si denotamos por $\partial f(a)$ al subdiferencial, entonces $x\mapsto\partial f(x)$ es una función multivaluada de Ω en E'. Si f es continua, entonces $\partial f(x)\neq\phi$ para todo $x\in\Omega$. El siguiente teorema es válido:

Teorema. La función subdiferencial $x\mapsto\partial f(x)$ es una función usco de Ω en E' dotado de la topología débil $\sigma(E';E)$.

La clase $\mathcal{G}$ *de Stegall* está compuesta por los espacios de Banach E tales que E' con la topología $\sigma(E';E)$ es un espacio topológico en la clase $\widehat{\mathcal{G}}$ (ver Stegall [6]). Los espacios de Banach separables pertenecen a la clase de Stegall.

Denotemos por $\mathcal{U}_G$ (resp. $\mathcal{U}_F$) a la clase de los espacios de Banach en los cuales las funciones convexas definidas en conjuntos abiertos y convexos son diferenciables en el sentido de Gâteaux (resp. en el sentido de Fréchet) en un subconjunto residual. Entonces $\mathcal{U}_F\subseteq\mathcal{G}\subseteq\mathcal{U}_G$. De este modo queda indicado la profunda relación entre las funciones usco y el cálculo diferencial en los espacios de Banach.

Ejemplo 7.7. Sea T un espacio topológico compacto y $\mathcal{C}(T)$ el espacio de Banach de las funciones continuas definidas en T y con valores en $\mathbb{R}$ con la norma del supremum. La función multivaluada $\psi:\mathcal{C}(T)\to\mathfrak{P}(T)$ definida por

$$\psi(x)=\{t\in T:x(t)=\|x\|\}$$

(el conjunto de los t en los cuales la función x alcanza el valor de la norma) es una función usco. Este ejemplo está muy relacionado con la diferenciabilidad de la norma del supremum en $\mathcal{C}(T)$.

Referencias bibliográficas

[1] Aubin, Jean-Pierre y Frankowska Hélen. *Set- Valued Analysis, Birkhäuser* (1990).

[2] Berge C. *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod, Paris (1962), el cual fue republicado por Dover Inc. como *Topological Spaces* (1967).

[3] Dugundji, J. *Topology, Allyn and Bacon Boston* (1966).

[4] Fabian, Marián J. *Gâteaux Differentiability of Convex Functions and Topology: Weak Asplund Spaces.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons (1997).

[5] Michael E. *Topologies on spaces of subsets*. Trans. Amer. Math. Soc., 71, pp. 151-182 (1951).

[6] Stegall. Ch. *A class of topological spaces and differentiability*. Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universitat Essen 10 (1983), 63- 77.

[7] Vietoris, L. *Bereiche zweiter Ordung*, Monatsh. F. Math., (1922).

Dirección de los autores

Diana Ximena Narvaez

Estudiante, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
dianaximena85@yahoo.com

Guillermo Restrepo

Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
guireste@yahoo.com