Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

REVISTA DE CIENCIAS

DIFERENCIA ENTRE SEMEJANZA Y PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA DESDE UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA[1]

Aura Lucía Quintero
Secretaría de Educación Distrital de Bogotá

María Judith Molavoque
Secretaría de Educación Distrital de Bogotá

Edgar Alberto Guacaneme
Universidad Pedagógica Nacional

Recibido: mayo 15, 2012 Aceptado: agosto 3, 2012

Pág. 75-85

Resumen

Analizar la teoría contenida en los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides permite advertir que si bien allí se expresan definiciones y proposiciones sobre la semejanza geométrica, la proporcionalidad geométrica no se reduce a esta. En este contexto teórico, la semejanza es una relación entre figuras rectilíneas, en tanto que la proporcionalidad geométrica alude a relaciones, de segundo orden, entre relaciones de magnitudes geométricas homogéneas. No obstante esta caracterización que les diferencia, existe una interesante relación entre estas.

Palabras y frases claves: semejanza, proporcionalidad geométrica, historia de las matemáticas, Euclides.

Abstract

Analyze the theory contained in the Books V and VI of Euclid's *Elements* to reveal that while in these are expressing definitions and propositions on the similarity, geometric proportionality is not limited to it. In this theoretical context, the similarity is a relation between rectilinear figures, while geometric proportionality refers to relations on relations between homogeneous geometrical magnitudes. Despite this characterization that unlike them, there is an interesting relationship between them.

Keywords: similarity, geometric proportionality, history of mathematics, Euclid.

1 Introducción

En el marco de la *Maestría en Docencia de la Matemática* de la Universidad Pedagógica Nacional, desarrollamos un trabajo de grado [1] a través del cual exhibimos el tratamiento que de la proporcionalidad geométrica se hace en algunos libros de texto de la Educación Básica. Tal empresa académica inicialmente nos llevó a preguntarnos qué es la proporcionalidad geométrica, qué es la semejanza geométrica y de qué manera estas se relacionan. La búsqueda de respuestas satisfactorias a estas cuestiones,

[1] Una versión preliminar de este documento se presentó como ponencia en el *IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas & V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria*, evento llevado a cabo en Bogotá, del 20 al 22 de octubre de 2011.

aparentemente triviales, aunada a una valoración de las teorías matemáticas y de la Historia de las Matemáticas como fuentes de respuesta a preguntas sobre los objetos matemáticos, nos condujo a estudiar los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides [2], en tanto presentan una teoría de la proporcionalidad geométrica, que si bien data de hace más de una veintena de siglos, ofrece una información importante para la distinción entre semejanza y proporcionalidad geométrica.

En lo que sigue, con el ánimo de compartir las aproximaciones logradas con otros profesores e interesados en estas cuestiones, y bajo la esperanza de que estas puedan brindarles mejores niveles de conciencia frente a su conocimiento sobre los objetos matemáticos, sintetizaremos el trabajo realizado y los asuntos centrales de los resultados alcanzados. Para ello, inicialmente presentaremos algunas generalidades de la proporcionalidad en los libros citados, para luego concentrarnos en el estudio del Libro VI e intentar establecer así la diferencia entre la proporcionalidad geométrica y la semejanza.

2 Proporcionalidad geométrica en *Elementos*

Sin lugar a duda, los Libros V y VI de *Elementos* constituyen uno de los hitos de la historia de la proporcionalidad geométrica; la teoría hipotético-deductiva allí expuesta, no solo recapituló y organizó un abundante legado matemático, sino que durante muchos siglos fue acicate y guía en la construcción de conocimiento matemático.

Como lo reseña Guacaneme [3], el Libro V presenta una teoría generalizada de las razones y proporciones, en tanto que elabora un discurso para las magnitudes geométricas euclidianas (longitud, superficie, volumen, amplitud angular), o de manera más precisa para las cantidades de tales magnitudes, sin aludir a una de ellas en específico y sin incorporar por ello números que representen la medida de tales cantidades de magnitud. En este libro no se alude a la semejanza geométrica, motivo por el cual no haremos mayor referencia a su contenido.

El Libro VI, por su parte, expresa en su conjunto una teoría para figuras y sus cantidades de magnitudes geométricas específicas. Es precisamente en el marco de esta en donde se encuentra la referencia a la semejanza entre figuras rectilíneas; de manera general y preliminar se puede señalar que en este libro aparecen proposiciones que establecen proporciones entre razones de cantidades de magnitud geométrica específica y proposiciones referidas a la semejanza, establecida a través de la primera definición del Libro VI, algunas de las cuales hoy en día identificamos como criterios de semejanzas entre triángulos. Veamos con más detalle el contenido del libro en cuestión, no sin antes resaltar el hecho de que tanto para la proporcionalidad geométrica como para la semejanza existe un tratamiento cuantitativo no numérico y que por tanto en esto no radica la diferencia fundamental.

3 Proporcionalidad geométrica y semejanza en el Libro VI de *Elementos*

En el Libro VI de *Elementos* de Euclides encontramos cinco definiciones, treinta y tres proposiciones y dos porismas. Para analizar su contenido y develar los significados de la proporcionalidad geométrica y la semejanza, siguiendo las directrices del análisis del Libro V realizado por Guacaneme [3], usamos como esquema analítico las categorías de la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS), a saber: *Situaciones* *problemas o tareas matemáticas, lenguaje matemático, conceptos o definiciones, propiedades, procedimientos* y *argumentos*.

3.1 Situaciones problemas o tareas matemáticas

Las proposiciones y porismas del Libro VI, se pueden dividir en dos grupos: veintitrés proposiciones por demostrar (proposiciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 31, 32, 33) y diez problemas por resolver o construcciones (proposiciones : 9, 10, 11, 12, 13, 18, 25, 28, 29, 30); su identificación en la obra euclidiana se favorece por la inclusión al final de la proposición de la sigla Q.E.D. y Q.E.F, respectivamente, las cuales se pueden interpretar como "queda entonces demostrado" o "queda entonces hecho", respectivamente relacionadas con las expresiones *hóper édei deîxaí* y *hóper édei poiésaí*, reportadas por Puertas [2].

La tarea fundamental de las proposiciones por demostrar es, naturalmente, la elaboración de pruebas que exhiban la deducción de los enunciados de cada proposición a partir de las anteriores proposiciones.

Los problemas por resolver aluden a cuestiones como: la construcción de figuras rectilíneas semejantes (proposiciones 18 y 25), la construcción de segmentos que sean media, tercera o cuarta proporcional (proposiciones 11, 12, 13), quitar una parte específica de un segmento (proposición 9), dividir un segmento de manera semejante a otro segmento dividido o en extrema y media razón (proposiciones 10 y 30) o aplicar a un segmento un paralelogramo (proposiciones 28 y 29). Al observar los enunciados (*prótasis*) de los problemas por resolver del Libro VI se puede advertir que solo tres incorporan el término "semejante"; dos de ellas lo usan para referirse a "figura semejante" (proposiciones 18[2] y 25[3]) y dos para referirse a "manera semejante" (proposiciones 10[4] y 18); si bien la primera expresión sí tiene una definición explícita en el marco de la teoría (definición 1), la segunda no. En el intento (fallido) de identificar la definición implícita de la segunda, nos llama la atención que esta se aplica en dos enunciados diferentes ("situada de" y "dividida de") y sólo para el segundo encontramos una conexión con la proporcionalidad entre los segmentos. Más allá de los enunciados, sí se advierte que la mayoría de los problemas del Libro VI se refieren a la proporcionalidad geométrica y sólo dos a la construcción de figuras semejantes.

3.2 Lenguaje matemático

Para examinar lo relativo a esta categoría, estudiamos los términos y palabras, la notación y los diagramas o dibujos empleados en el discurso del Libro VI.

---

[2] Proposición 18: A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada.

[3] Proposición 25: Construir una misma (figura) semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra (figura) dada.

[4] Proposición 10: Dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada ya dividida.

Términos o palabras

En el discurso del Libro VI encontramos tres tipos de palabras, a saber: las que se refieren a los objetos geométricos (*v.g.*, triángulo, paralelogramo, figura rectilínea, ángulo, recta, recta finita, lado, altura), las que se refieren a las relaciones entre la cantidad de magnitud de los objetos o las relaciones entre estas, (*v.g.*, razón, proporción), y las que se refieren a la relación entre dos o más objetos (*v.g.,* altura, perpendicular, paralela, semejanza). Nótese que bajo esta óptica, la semejanza se clasifica en un tipo de palabra diferente a aquel en el que se clasifican los términos "razón" y "proporción", asociados directamente con la proporcionalidad geométrica. La semejanza se asocia entonces a una relación entre objetos, en tanto que la razón se asocia a una relación entre propiedades de los objetos.

Notación

La notación que utiliza Euclides incluye el empleo de las primeras letras mayúsculas del alfabeto griego $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}, \mathrm{H}, \Theta, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots)$ que usadas de manera individual denotan puntos, segmentos o superficies. Sin embargo, utiliza seguidas dos de estas letras tanto para denotar segmentos, donde las letras parecen indicar los extremos del segmento, como para referirse a paralelogramos, a través de una de sus diagonales. Adicionalmente, utiliza tres letras para aludir a un triángulo. Por ejemplo, la *ékthesis* de la proposición 12 es "Sean $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ las tres rectas dadas", en la prueba de la Proposición 9 Euclides incluye el texto "Sea AB la recta dada" y al inicio de la prueba de la Proposición 1, se encuentra el texto "Sean $\mathrm{AB}\Gamma$, $\mathrm{A}\Gamma\Delta$ triángulos y $\mathrm{E}\Gamma$, $\Gamma\mathrm{Z}$ paralelogramos que tienen la misma altura".

En el Libro VI, más allá de las expresiones "es a", "guarda la misma razón" o "es semejante a", no identificamos designación o notación para referirse a las proporciones o a la semejanza entre figuras rectilíneas; esta falta de notación no impide que al estudiar las proposiciones se pueda indicar cuál de estos objetos es utilizado para justificar y demostrar los pasos hechos en cada proposición.

Diagramas o dibujos

Los diagramas o dibujos que componen el Libro VI, aparecen en cada una de las proposiciones, independientemente de si estas son propiedades o problemas. En su gran mayoría los dibujos representan triángulos y paralelogramos; sin embargo en la construcción de las proposiciones 13 (construcción de media proporcional) y 33 aparece un dibujo que contiene representaciones de un semicírculo o un círculo[5]. A modo de ejemplo presentamos en la Ilustración 1 algunos dibujos que emplea Euclides en las proposiciones 13, 21, 23 y 29, respectivamente.

[5] Debemos advertir que el trazo curvo que aparece en las figuras de las proporciones 27, 28 y 29 no alude de manera propia a un círculo ni a parte de él.

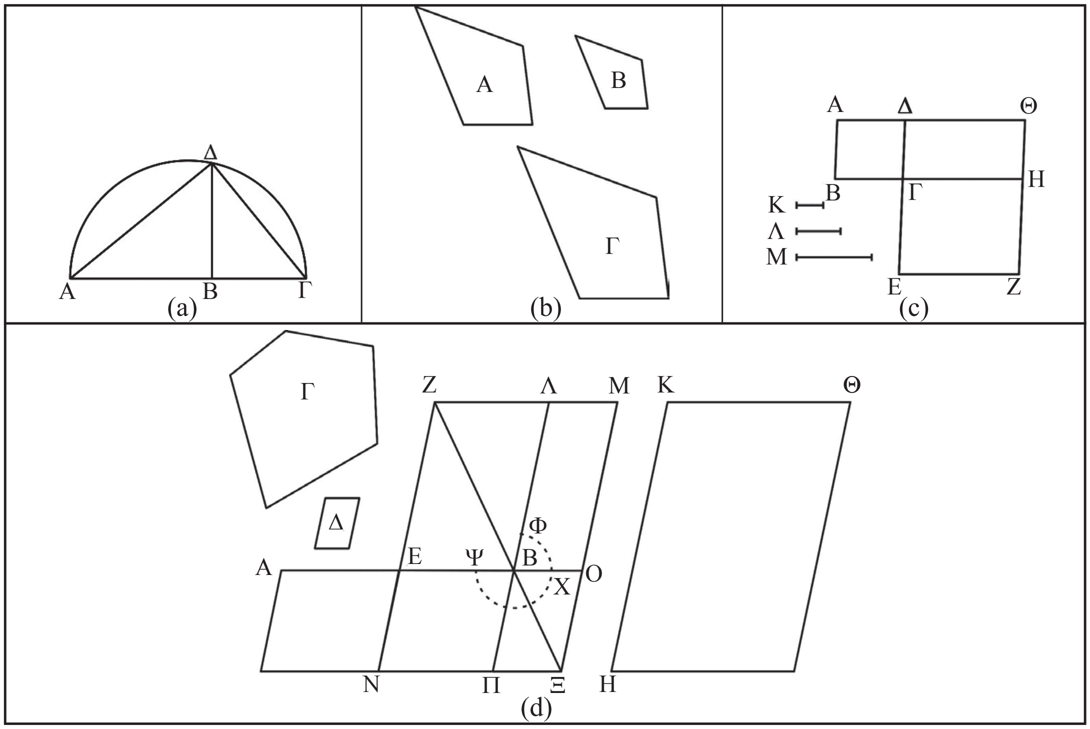

Ilustración 1. Dibujos empleados por Euclides en el Libro VI

Como podemos ver en los dibujos, además de las figuras, Euclides incorpora las letras griegas en mayúscula; allí se observa claramente las diferentes expresiones semánticas de una sola letra, reseñadas antes en el apartado titulado “Notación”.

Por otra parte, si bien en el Libro V las magnitudes geométricas en general se representan a través de trazos rectos, en el Libro VI las representaciones son “propias”, es decir, que los gráficos no son generalizaciones; si en una proposición se hace referencia a triángulos, rectas o paralelogramos, en los gráficos correspondientes habrá triángulos rectas o paralelogramos. Igualmente, debemos señalar que si en el Libro VI se señala que las figuras son semejantes, el dibujo expresa tal semejanza, como se observa en la Ilustración 1(b). Adicionalmente, debemos señalar que aunque en la mayoría de las proposiciones que refieren figuras semejantes incluyen dibujos homotéticos ubicados “en la misma posición”, hay al menos una en donde las figuras semejantes no satisfacen esta condición, como en el caso de los tres triángulos semejantes de la proposición 8 (ver la Ilustración 2(a)).

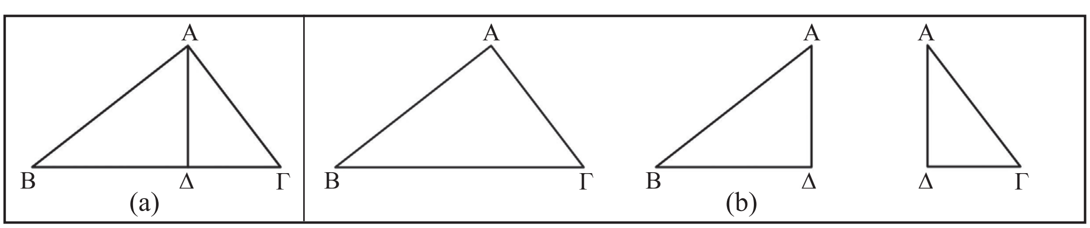

Ilustración 2. Tres triángulos semejantes

Como se observa en la Ilustración 2(b), donde se han discriminado los triángulos de la Ilustración 2(a), con una rotación el segundo triángulo se "verá" semejante al tercero, pero para el primer triángulo la rotación no es suficiente, pues habría que aplicarle una reflexión.

3.3 Conceptos o definiciones

Si bien en el Libro VI Euclides utiliza varios conceptos (*v.g.*, equiángulo, semejante, altura, subtiende, extrema y media razón, inversamente relacionado, semejanza), en este define los siguientes objetos (resaltados por nosotros en las definiciones tomadas de [2]):

> **Definición 1**. **Figuras rectilíneas semejantes** son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.

Esta primera definición encontrada en el Libro VI nos aproxima a la idea de semejanza que utiliza el autor. Aquí nos interesa enfatizar en que Euclides establece la semejanza únicamente como una característica de dos o más figuras rectilíneas (polígonos), pero no establece semejanza entre figuras no rectilíneas; la proporcionalidad geométrica se da entre al menos tres objetos geométricos (o más precisamente, entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas).

> **Definición 3**. Se dice que una recta ha sido cortada en **extrema y media razón** cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor.

Consideramos que esta definición contempla una alusión a la proporcionalidad geométrica, pero no una a la semejanza; ello por cuanto, como lo señalamos antes, la semejanza se da entre figuras rectilíneas (polígonos) y no entre segmentos.

> **Definición 4**. En toda figura, la **altura** es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base.

A través de esta, se caracteriza un segmento que puede no hacer parte integral de la figura rectilínea en cuestión, sino que puede construirse como un apéndice de la figura. Esta definición no alude ni a la proporcionalidad geométrica, ni a la semejanza.

Si bien el Libro VI presenta dos definiciones más, coincidimos con la posición de Puertas [2], según la cual la definición 2[6] y la 5[7] han sido interpoladas por autores posteriores a Euclides. Particularmente, hemos interpretado que la definición 5 no debe ser de origen euclidiano pues no solo contempla razones entre razones (es decir no entre magnitudes, como es usual en Euclides), sino que además incluye una operación entre razones (que no hace parte del discurso euclidiano, ni siquiera al hablar sobre razones compuestas).

---

[6] Definición 2: (Dos) figuras están inversamente relacionadas cuando en cada una de las figuras hay razones consecuentes y antecedentes.

[7] Definición 5: Se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen alguna razón.

3.4 Propiedades

En este apartado ilustramos el análisis hecho a las proposiciones, en las cuales miramos con detenimiento el planteamiento de semejanza y proporcionalidad geométrica. Iniciemos con la primera proposición[8] del Libro VI. En esta primera proposición, bajo la condición de que triángulos y paralelogramos tengan la misma altura, se relacionan elementos como: la cantidad de superficie de los triángulos, la cantidad de superficie de los paralelogramos y la cantidad de longitud de las bases. En esta, Euclides establece la razón entre la cantidad de superficie de los triángulos $\left(\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}\right)$, la razón entre cantidad de superficie de los paralelogramos $\left(\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}\right)$ y la razón entre cantidad de longitud de las bases $\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\right)$; además, cuando señala que son entre sí como sus bases, establece tres proporciones: $\left(\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\right)$; una de ellas con cuatro magnitudes homogéneas (*i.e.*, cantidad de superficie) $\left(\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}\right)$ y las dos restantes con parejas de magnitudes de diferente naturaleza (*i.e.*, cantidad de superficie y cantidad de longitud) $\left(\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\ ;\ \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\right)$. Como se observa, en esta proposición hay alusión a razones y proporciones, pero no a la semejanza entre figuras rectilíneas, lo cual nos conduce a afirmar que en esta proposición Euclides trabaja proporcionalidad geométrica entre magnitudes, pero no semejanza.

Las proposiciones 4, 5, 6 y 7 ofrecen un panorama similar al de la proposición 1, pero con un elemento de discusión adicional. Escojamos, por ejemplo, la proposición 4[9]. Si bien en esta proposición se deduce la proporcionalidad entre las cantidades de las longitudes de los triángulos equiángulos, y esta puede ser hoy interpretada como un criterio de semejanza entre triángulos (conocido como ángulo-ángulo-ángulo), Euclides no menciona la semejanza entre estos. No obstante tal falta de alusión, hay en el Libro VI al menos tres proposiciones (8, 18 y 20) que sí refieren explícitamente la semejanza entre figuras rectilíneas, en cuyas demostraciones la proposición 4 juega un papel esencial; sin embargo, las otras proposiciones (5, 6 y 7) no se vinculan a proposiciones que versen sobre la semejanza. Atendiendo a lo anterior, afirmamos que estas proposiciones (4, 5, 6 y 7) se refieren a la proporcionalidad geométrica, pero no a la semejanza.

En el Libro VI encontramos algunas proposiciones que sí abordan el estudio de la semejanza de manera específica y explícita (proposiciones 8, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29 y 31); esta última[10] constituye una generalización del Teorema de Pitágoras (Libro I, Proposición 47) para figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo. De éstas, ameritan especial atención las proposiciones 21 y 22. La

---

[8] Proposición 1: Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

[9] Proposición 4: En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

[10] Proposición 31: En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

proposición 21[11] reviste un interés en la medida en que define una condición de transitividad para semejanza geométrica. La proposición 22[12], es interesante en tanto que en ella hay una interesante convergencia entre la semejanza de figuras y la proporcionalidad geométrica.

La primera parte de su prueba inicia planteando la proporción geométrica entre la cantidad de longitud de las rectas $\left(\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H\Theta}}\right)$. Luego se construyen figuras semejantes y situadas de manera semejante a partir de las rectas proporcionales antes mencionadas $(\mathrm{KAB}, \Lambda\Gamma\Delta, \mathrm{MZ}, \mathrm{N\Theta})$ y se deduce la proporcionalidad entre la cantidad de superficie de las figuras semejantes $\left(\frac{\mathrm{KAB}}{\Lambda\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{N\Theta}}\right)$. Como se puede observar, la semejanza geométrica es una condición mediadora para establecer proporcionalidad entre las cantidades de superficie a partir de la proporcionalidad entre las cantidades de longitud, o viceversa.

A partir de lo anterior, podemos afirmar que las proposiciones del Libro VI se pueden agrupar atendiendo a si su objeto central de estudio es la proporcionalidad geométrica o la semejanza, sin que ello implique desconocer algunos nexos interesantes entre estos (como lo ilustrado para la proposición 22).

3.5 Procedimientos

Los procedimientos en el Libro VI de Euclides se encuentran fundamentalmente en las proposiciones que son problemas y que se discutieron al final del apartado “Situaciones problemas o tareas matemáticas” de este documento.

3.6 Argumentos

El Libro VI de los *Elementos* emplea un discurso deductivo en la prueba de las proposiciones. Para el caso de las proposiciones por demostrar, reconocemos una estructura de seis etapas, a saber: enunciado (*prótasis*), exposición (*ékthesis*), determinación o delimitación (*diorismós*), preparación o construcción (*kataskeué*), demostración (*apódeixis*) y conclusión (*sympérasma*). La primera hace alusión al enunciado de la proposición, que en la versión de Puertas [2] se encuentra resaltado en letra cursiva. La *ékthesis* corresponde al inicio de la demostración y aparece en el segundo párrafo de la proposición donde encontramos generalmente los términos “Sean”, “Sea” o “Pues sea”, aunque en algunas proposiciones (como en la proposición 2 y 26) se utilizan otras expresiones (“Trácese” y “Pues quítese”, respectivamente). El tercer párrafo corresponde al *diorismós*, que usualmente inicia con el término “Digo”. A continuación se encuentra la *kataskeué* o construcción, esta se ubica en el cuarto párrafo y explica las construcciones necesarias para a continuación realizar la *apódeixis* o demostración. Luego de la demostración se ubica la *sympérasma*, que aparece como párrafo final (salvo el caso donde haya porisma), donde encontramos términos como

[11] Proposición 21: Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.

[12] Proposición 22: Si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales.

"Por consiguiente". Esta estructura es independiente de si las proposiciones se refieran a la proporcionalidad geométrica o a la semejanza, por lo cual no nos ofrece un elemento de discriminación.

Mientras que para el caso de las proposiciones por construir, encontramos que el *prótasis* también aparece en la versión de Puertas [2] en letra cursiva pero empieza con las expresiones "Quitar", "Dividir", "Dadas", "A partir de", "Construir" y "Aplicar". La *ékthesis,* que corresponde al inicio de la construcción, aparece en el segundo párrafo de la proposición y también se encuentran generalmente los términos "Sean", "Sea" o "Pues sea". El tercer párrafo que corresponde al *diorismós*, inicia con del término "Así pues". En el siguiente párrafo se encuentra la *kataskeué* o construcción, de manera similar a la construcción de las proposiciones por demostrar, y a continuación y también de manera similar se encuentra la *apódeixis* donde usualmente se utilizan términos como "Puesto que" y "Entonces". Y también en el último párrafo se encuentra la *sympérasma* que utiliza términos como "Por consiguiente" y "Por tanto".

Por otra parte, hemos elaborado un mapa deductivo de las proposiciones del Libro VI (ver Ilustración 3) en donde las flechas representan las conexiones lógico-deductivas entre las diferentes proposiciones; así, por ejemplo, en la Ilustración 3 se puede leer que la proposición 26 (P26) es utilizada en las respectivas demostraciones de las proposiciones 27 y 28, en tanto que en la demostración de la proposición 26 interviene únicamente la proposición 24.

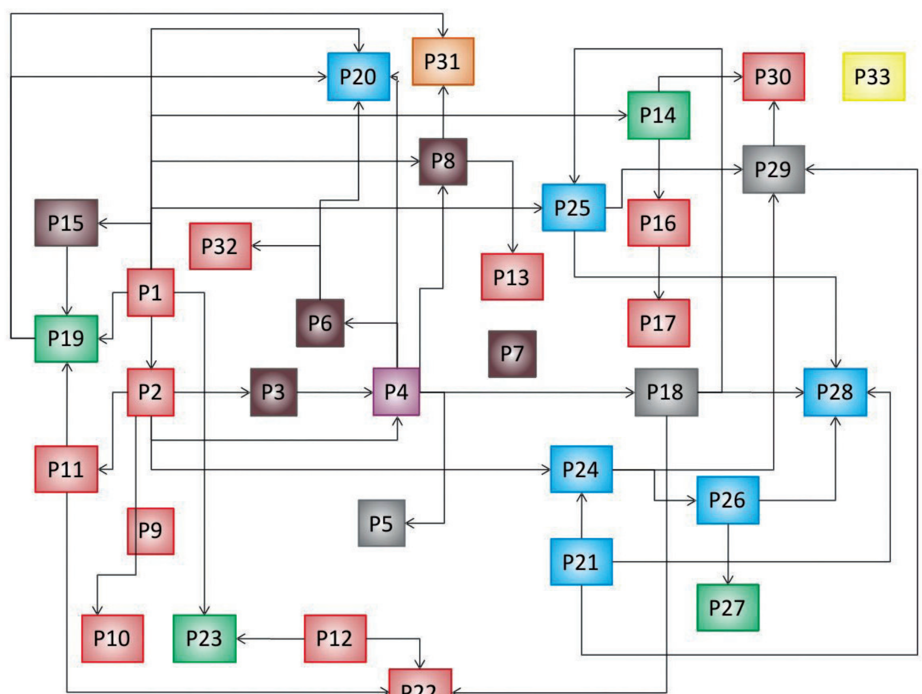

Ilustración 3. *Mapa deductivo de las proposiciones del Libro VI*

Esta representación nos ha permitido una aproximación a la *complejidad lógica* de cada proposición, pues suponemos que aquellas que reciben más flechas, son más exigentes que aquellas que reciben menor número de flechas; este es el caso de las proposiciones 20 y 28. Así mismo, suponemos que aquellas de las que salen mayor número de flechas (*i.e.*, que están involucradas en más proposiciones) son de mayor jerarquía para la teoría expuesta en el Libro VI; las proposiciones 2 y 4 tienen esta condición y se refieren a proporcionalidad geométrica. Sin embargo, a partir de esta información no hemos logrado identificar una diferencia sustancial en cuanto al tratamiento argumentativo diferenciado para la proporcionalidad geométrica y la semejanza.

4 Conclusiones

Definitivamente el estudio del Libro VI de *Elementos* nos ha permitido mejorar el nivel de conciencia que, en tanto profesores de matemáticas, teníamos frente al conocimiento matemático relacionado con la proporcionalidad geométrica y la semejanza. Este hecho revela un efecto concreto en el conocimiento del profesor de Matemáticas, generado por el estudio de la Historia de las Matemáticas. Hoy, tenemos más y mejores argumentos para diferenciar la proporcionalidad geométrica de la semejanza, pero a la vez, para reconocer sus nexos e interacciones. En esta dirección reconocemos que:

(i) La semejanza alude a una relación entre dos figuras rectilíneas, en tanto que la proporcionalidad geométrica se refiere a las proporciones que se pueden establecer entre las cantidades de magnitud de objetos geométricos.

(ii) Hay procedimientos para realizar construcciones de figuras semejantes y otros para construir objetos geométricos (rectas, superficies, ángulos) proporcionales.

(iii) A pesar de que no exista una notación (simbólica) para las proporciones y para la semejanza, el discurso permite identificar cuándo se está haciendo referencia a unas o a otra.

(iv) Tanto la semejanza como la proporcionalidad geométrica son percibidas a través de la representación propia de los objetos geométricos y deducidas desde la perspectiva hipotética deductiva.

(v) Las proposiciones del Libro VI se pueden discriminar atendiendo a si asumen la proporcionalidad geométrica o la semejanza como objeto central de estudio.

Esta caracterización se muestra útil para el ejercicio de análisis de textos escolares, en la perspectiva de caracterizar el tratamiento que en estos se hace de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza.

Por contera, debemos reconocer que el estudio y análisis del Libro VI nos generó un gran esfuerzo cognitivo, quizá debido principalmente a que no estamos acostumbrados a pensar geométricamente sino numéricamente; en otras palabras, reconocemos que habitualmente incorporamos un pensamiento cuantitativo numérico, incluso para el estudio de la Geometría, y que la propuesta euclidiana para esta implica el empleo de un pensamiento cuantitativo no numérico referido a las cantidades de magnitud, y no a su medida. Esta experiencia nos sugiere la hipótesis, verificada en nuestras tesis de maestría [1, 4, 5], que en las matemáticas escolares la proporcionalidad tiene un marcado énfasis en el tratamiento aritmético, pero no en el estrictamente geométrico, hecho que debe conducir a una reflexión sobre la racionalidad del mismo y sobre las posibilidades de alterar este *statu quo* a favor de otras modalidades de pensamiento matemático, como el cuantitativo no numérico.

Referencias bibliográficas

[1] Quintero, A. L. y Molavoque M. J. (2012). *Análisis de las tareas asociadas a la proporcionalidad geométrica y la semejanza, presentes en libros de texto de Matemáticas, en el Departamento de Matemáticas*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

[2] Puertas, M. L. (1994), *Euclides. Elementos. Libros V-IX.* Biblioteca Clásica Gredos, Madrid: Editorial Gredos S.A.

[3] Guacaneme, E. A. (2012), *Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de Elementos, pensamiento, epistemología y lenguaje matemático,* O. L. León, Editor, Fondo de Publicaciones Universidad Distrital "Francisco José de Caldas": Bogotá. 99-136.

[4] Guacaneme, E. A. (2001), *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas, Instituto de Educación y Pedagogía*, Universidad del Valle, 358.

[5] Guacaneme, E.A., (2002). *Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas.* Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 7(1) 3-42.

Dirección de los autores

Aura Lucía Quintero
Colegio Centro Integral José María Córdoba, Secretaría de Educación del Distrito, Bogotá - Colombia
alqmatematicas@gmail.com

María Judith Molavoque
Colegio Centro Integral José María Córdoba, Secretaría de Educación del Distrito, Bogotá - Colombia
jmolavoque@gmail.com

Edgar Alberto Guacaneme
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá - Colombia
guacaneme@pedagogica.edu.co.