Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

COTA INFERIOR PARA EL PRIMER VALOR PROPIO DE NEUMANN

Oscar Andrés Montaño Carreño
Universidad del Valle

Recibido: mayo 10, 2013 Aceptado: julio 8, 2013

Pág. 37-43

Resumen

En este artículo se proporciona una cota inferior del primer valor propio de Neumann para un dominio euclídeo con simetría con respecto al origen.

Palabras claves: valor propio, cota inferior, problema de valores propios de Neumann.

Abstract

In this paper, we provide a lower bound of the first Neumann eigenvalue of a Euclidean domain with symmetry regarding the origin.

Keywords: eigenvalue, lower bound, Neumann eigenvalue problem.

1 Introducción

Sea $M \subset R^n$ un dominio con borde ∂M suave. El problema de valores propios de Neumann consiste en encontrar todos los números reales μ para los cuales existe una solución no trivial $\phi \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$ que satisfacen la ecuación

$$\begin{cases} \Delta\phi + \mu\phi & = 0 \ \text{ en } M, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} & = 0 \ \text{ sobre } \partial M. \end{cases} \tag{1}$$

El conjunto de valores propios para el problema de Neumann (1) consiste de una sucesión creciente

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots + \infty,$$

donde cada espacio propio asociado es finito dimensional. Dos espacios propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales en $L^2(M)$. $L^2(M)$ es la suma directa de todos estos espacios propios y cada función propia es C^∞ sobre $\overline{M}$.

El problema de valores propios de Steklov consiste en encontrar todos los números reales ν para los cuales existe una solución no trivial $\varphi \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$ que satisfacen la ecuación

$$\begin{cases} \Delta\varphi & = 0 \ \text{ en } M, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & = \nu\varphi \ \text{ sobre } \partial M. \end{cases} \tag{2}$$

Al igual que en el problema de Neumann el conjunto de valores propios del problema de Steklov (2) consiste de una sucesión creciente

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots + \infty,$$

con conclusiones análogas a las del problema (1). El primer valor propio no cero, μ_1, del problema (1) es conocido como el primer valor propio de Neumann. El primer valor propio no cero, ν_1, del problema (2) es conocido como el primer valor propio del problema de Steklov. Los valores propios pueden ser caracterizados variacionalmente. Para $u \in C^\infty(M)$, sea

$$\|u\|^2 = \int\limits_M |u|^2 + \int\limits_M |\nabla u|^2 . \tag{3}$$

Sea $H_M := H^1(M)$ la completación del espacio $C^\infty(M)$ con la norma dada por la ecuación (3). Las caracterizaciones variacionales son las siguientes

$$\mu_1(M) = \text{ínf} \left\{ \frac{\int\limits_M |\nabla u|^2 \, dv}{\int\limits_M u^2 dv} : \int\limits_M u dv = 0 \right\}, \tag{4}$$

$$\nu_1(M) = \text{ínf} \left\{ \frac{\int\limits_M |\nabla u|^2 \, dv}{\int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma} : \int\limits_{\partial M} u d\sigma = 0 \right\}. \tag{5}$$

Definición 1.1. *Una función $u \in H_M$ es factible para el problema (4) si $\int\limits_M u dv = 0$, en tal caso*

$$\mu_1(M) \le \frac{\int\limits_M |\nabla u|^2 \, dv}{\int\limits_M u^2 dv}.$$

Definición 1.2. *Una función $u \in H_M$ es factible para el problema (5) si $\int\limits_{\partial M} u d\sigma = 0$, en tal caso*

$$\nu_1(M) \le \frac{\int\limits_M |\nabla u|^2 \, dv}{\int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma}.$$

Supongamos que $M \subset R^n$ es un dominio con borde ∂M suave, simétrico con respecto al origen y con respecto a la coordenada x_n y que Ω es la proyección de M sobre el hiperplano $x_n = 0$. Nos proponemos en esta nota encontrar una desigualdad entre el primer valor propio de Neumann $\mu_1(\Omega)$ y el primer valor propio de Steklov $\nu_1(M)$. Usando la desigualdad hallada y suponiendo la convexidad fuerte de ∂M, es decir, que la segunda forma fundamental π sobre ∂M satisface la condición $\pi \geq kI$ para alguna constante positiva k, demostraremos que $\mu_1(\Omega) > \frac{k^2}{2}$.

2 Preliminares

Por un teorema clasico de Bonnet and Myers ([1]), si una variedad Riemanniana n-dimensional y completa M tiene curvatura de Ricci mayor o igual a $(n-1)k$, donde $k > 0$ es una constante, entonces el diámetro de M es a lo más $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Por Cheng [2] se tiene el siguiente teorema de rigidez: si el diámetro de M es igual a $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, entonces M es isométrica a una n-esfera de curvatura seccional constante k. Recientemente Martin Li [4] demostró un teorema similar para variedades completas con curvatura de Ricci no negativa y borde medianamente convexo. El teorema se enuncia a continuación.

Teorema 2.1. *Sea M una variedad riemanniana completa n-dimensional ($n \geq 2$) con curvatura de Ricci no negativa y frontera no vacía ∂M. Asumamos que la curvatura media h de la frontera ∂M con respecto a la normal interior satisface $h \geq k > 0$ para alguna constante positiva k. Sea d la función distancia sobre M. Entonces,*

$$d =: \sup_{x \in M} d(x, \partial M) \leq \frac{1}{k}. \tag{6}$$

Además, si ∂M es compacto, entonces M también es compacto y la igualdad se tiene si y sólo si M es isométrica a una bola euclidiana n-dimensional de radio $\frac{1}{k}$.

Note que bajo las suposiciones de curvatura la variedad M puede no ser compacta. Sin embargo, si se impone convexidad fuerte sobre ∂M, entonces la convexidad fuerza a ∂M a ser compacta y en consecuencia M sería también compacta.

A continuación enunciamos dos teoremas demostrados por Escobar J. F. en [3] en los cuales encuentra cotas inferiores para el primer valor propio de Steklov cuando la curvatura de Ricci es no negativa y el borde es convexo. Para el caso 2 dimensional la cota es óptima, en dimensiones altas el mismo Escobar J. F. conjetura que la mejor cota debe ser k.

Teorema 2.2. *Sea M una variedad riemanniana compacta n-dimensional ($n \geq 3$) con curvatura de Ricci no negativa y frontera no vacía ∂M. Asumamos que la segunda forma fundamental π sobre ∂M satisface que $\pi \geq kI$ para alguna constante positiva k. Entonces*

$$\nu_1(M) > \frac{k}{2} \tag{7}$$

Teorema 2.3. *Sea M una variedad riemanniana 2-dimensional compacta con borde. Asumamos que M tiene curvatura gaussiana no negativa y que la curvatura geodésica de ∂M, k_g satisface $k_g \geq k > 0$ para alguna constante positiva k.*

Entonces

$$\nu_1(M) \geq k. \tag{8}$$

La igualdad se tiene solamente para la bola euclidiana de radio k^{-1}.

3 Resultados

En lo que sigue $M \subset R^n$ será un dominio con borde ∂M suave, simétrico con respecto al origen y con respecto a la coordenada x_n. Ω será la proyección de M sobre el hiperplano $x_n = 0$. La segunda forma fundamental π sobre ∂M satisface que $\pi \geq kI$ para alguna constante positiva k. $U = \left\{x \in R^{n-1} \mid (x,0) \in \Omega\right\}$ y $f : \overline{U} \to R$ es una función en $C^1(U) \cap C^0(\overline{U})$, con $f(-x) = f(x) > 0$ para todo $x \in U$ y tal que $(x,0) \in \partial\Omega$ si y sólo si $f(x) = 0$. Suponemos además que $M = \{(x,z) \in U \times R \mid -f(x) < z < f(x)\}$.

Proposición 3.1. *Si ϕ es la primera función propia para el problema de Neumann sobre Ω con valor propio $\mu_1(\Omega)$, entonces ϕ no tiene simetría par.*

Demostración. Del teorema de Dominios Nodales de Courant [1], $N = \phi^{-1}\{0\}$ divide a $\overline{\Omega} - N$ en dos dominios nodales Ω_- y Ω_+. Si suponemos que ϕ tiene simetría par, entonces ó N es una hipersuperficie simétrica con respecto al origen que separa $\overline{\Omega}$ y tal que $N \cap \partial\Omega \neq \oslash$ ó N es una hipersuperficie cerrada simétrica con respecto al origen. En el primer caso dado que la hipersuperficie N es simétrica con respecto al origen entonces $\Omega_- = -\Omega_+$, lo cual es absurdo dada la simetría par de ϕ. En el segundo caso si asumimos que $\partial\Omega_+ = N$. Puesto que ϕ tiene un único signo sobre Ω_+ entonces $\mu_1(\Omega) = \lambda(\Omega_+)$, donde $\lambda(\Omega_+)$ denota el primer valor propio de Dirichlet sobre Ω_+. Puesto que $\Omega_+ \subset \Omega$ entonces $\mu_1(\Omega) = \lambda(\Omega_+) \geq \lambda(\Omega)$. De [5] sabemos que $\mu_1(\Omega) < \lambda(\Omega)$. Tenemos así una contradicción y por lo tanto ϕ no puede ser par.

Teorema 3.1. *Sea ϕ primera función propia para el problema de Neumann sobre Ω con valor propio $\mu_1(\Omega)$. Sea $\nu_1(M)$ el primer valor propio correspondiente al problema de Steklov sobre M. Entonces*

$$\nu_1(M) < (\max_U f)\mu_1(\Omega). \tag{9}$$

Demostración. Supongamos primero que ϕ tiene simetría impar, es decir, $\phi(-x,0) = -\phi(x,0)$ para todo $x \in U$. Sea $\varphi : M \to R$ definida por

$$\varphi(x,z) = \phi(x,0),$$

puesto que

$$\int_{\partial M} \varphi d\sigma = 2\int_U \phi(x,0)\sqrt{1 + |\nabla f|^2}dx = 0,$$

de la definición (1.1) φ es factible para el problema de Steklov, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\nu_1(M) &\leq \frac{\int\limits_{M} |\nabla\varphi|^2 \, dv}{\int\limits_{\partial M} \varphi^2 d\sigma} \\
&= \frac{2\int\limits_{U} f(x) \, |\nabla\phi|^2 \, dx}{2\int\limits_{U} \phi^2 \sqrt{1+|\nabla f|^2} dx} \\
&< (\max_{U} f) \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla\phi|^2}{\int\limits_{\Omega} \phi^2} \\
&= (\max f)\mu_1(\Omega).
\end{aligned}$$

De otro lado si ϕ no es impar, entonces $\psi(\xi) = \phi(\xi) - \phi(-\xi)$ es impar y no nula por la proposición (3.1). Sobre la frontera de Ω,

$$\nabla\psi(\xi) = \nabla\phi(\xi) + \nabla\phi(-\xi),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(\xi) &= \langle\nabla\phi(\xi), \eta(\xi)\rangle + \langle\nabla\phi(-\xi), \eta(\xi)\rangle \\
&= \langle\nabla\phi(\xi), \eta(\xi)\rangle - \langle\nabla\phi(-\xi), \eta(-\xi)\rangle \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\xi) - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}(-\xi) = 0.
\end{aligned}$$

También, sobre Ω,

$$\begin{aligned}
\Delta\psi(\xi) &= \Delta\phi(\xi) - \Delta\phi(-\xi) \\
&= -\mu_1(\Omega)\phi(\xi) + \mu_1(\Omega)\phi(-\xi) \\
&= -\mu_1(\Omega)(\phi(\xi) - \phi(-\xi)) = -\mu_1(\Omega)\psi(\xi).
\end{aligned}$$

Tenemos de nuevo una función propia impar y desde luego la desigualdad (9).

Teorema 3.2. *El primer valor propio $\mu_1(\Omega)$ para el problema de Neumann sobre Ω satisface la desigualdad $\mu_1(\Omega) > \frac{k^2}{2}$.*

Demostración. Sea d como en el teorema 2.1. De la ecuación (9)

$$\mu_1(\Omega) > \frac{\nu_1(M)}{(\max_{U} f)}. \tag{10}$$

De los teoremas 2.1 y 2.2 obtenemos

$$\mu_1(\Omega) > \frac{\nu_1(M)}{(\max_{U} f)} > \frac{k}{2d} \geq \frac{k^2}{2}. \tag{11}$$

4 Ejemplo

Sea $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $a \geq b \geq c > 0$. Sea M la región acotada por el elipsoide $F(x,y,z) = 1$ y Ω la proyección de M sobre el plano $z = 0$. La segunda forma fundamental π en cualquier punto $P = (x,y,z) \in \partial M$ viene dada por

$$\pi(v,v) = \frac{\langle (HF)(v), v\rangle}{|\nabla F|}, \tag{12}$$

donde HF es el hessiano de F en P, ∇F es el gradiente de F en P y v es tangente a ∂M en P. Tenemos así:

$$\begin{aligned}\pi(v,v) = \frac{\langle (HF)(v), v\rangle}{|\nabla F|} &= \frac{\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2} + \frac{v_3^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \\ &\geq \frac{\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{a^2} + \frac{v_3^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{c^2a^2} + \frac{y^2}{c^2b^2} + \frac{z^2}{c^2c^2}}} \\ &= \frac{c}{a^2}\,|v|^2 .\end{aligned}$$

En tal caso $k = \frac{c}{a^2}$. Si $c > b$, obtenemos $k = \frac{b}{a^2}$. En la primera situación se tiene $\mu_1(\Omega) > \frac{c^2}{2a^4}$ y en la segunda $\mu_1(\Omega) > \frac{b^2}{2a^4}$. Se concluye de aqui que la mejor cota es $\frac{b^2}{2a^4}$. Esta cota se obtiene tomando un elipsoide con $c \geq b$ y no depende del valor de c. En el caso particular que Ω sea un círculo de radio R, obtenemos $\mu_1(\Omega) > \frac{R^2}{2R^4} = \frac{1}{2R^2}$.

5 Conclusiones

Hemos obtenido una cota inferior para el primer valor propio de Neumann en dominios euclidianos simétricos. Nuestra cota inferior está ligada a la cota inferior hallada por Escobar para el primer valor propio de Steklov [3]. Sabemos que la cota de Escobar no es óptima, así nuestra cota tampoco es la óptima. La cota mejora si la conjetura de Escobar resulta cierta, en tal situación como en el caso bidimensional la desigualdad queda $\mu_1(\Omega) > k^2$. Puesto que en la bola de radio R el primer valor propio de Steklov es $\nu_1(M) = 1/R$, podemos decir que para la bola de radio R el primer valor propio de Neumann satisface la desigualdad $\mu_1(\Omega) > 1/R^2$.

Agradecimientos

Expreso mi gratitud al profesor evaluador de este trabajo por sus valiosas correcciones y significativas sugerencias.

Referencias bibliográficas

[1] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, Inc.*, (1984)

[2] S. Y. Cheng, *Eigenvalue Comparison Theorems and its Geometric Aplications, Math. Z.*, 143, #3 289-297, (1975)

[3] J. F. Escobar, *The Geometry of the first Non-Zero Stekloff Eigenvalue, Journal of functional analysis*, 150, 544-556, (1997)

[4] M. Li, *Manifolds with Nonnegative Ricci Curvature and Mean Convex Boundary, arXiv:1204.1695v1*, (2012)

[5] G. Pólya, *Remarks on the foregoing paper, J. Math. Phys., 31, 55-57*, (1952)

Dirección del autor

Oscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
oscar.montano@correounivalle.edu.co