Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

REVISTA DE CIENCIAS

COTA SUPERIOR PARA EL PRIMER VALOR PROPIO DE STEKLOV EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

Óscar Andrés Montaño Carreño
Universidad del Valle

Recibido: septiembre 26, 2013 Aceptado: noviembre 26, 2013

Págs. 95-103

Resumen
En este artículo se proporciona una cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov en un dominio de R^n.

Palabras clave: valor propio, cota superior, problema de Steklov.

Abstract
In this paper we provide an upper bound for the first eigenvalue of the Steklov problem in a domain of R^n.

Keywords: eigenvalue, upper bound, Steklov problem.

1 Introducción

Sea (M^n, g) una variedad riemanniana con frontera ∂M. El problema de Steklov consiste en encontrar soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi = 0 \text{ en } M \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \nu\varphi \text{ sobre } \partial M \end{aligned} \tag{1}$$

donde ν es un número real. Este problema fue introducido por Steklov [7] en 1902, para dominios acotados en el plano. El problema tiene orígenes físicos, la función φ representa un estado estacionario de la temperatura en M donde el flujo sobre el borde, ∂M, es proporcional a la temperatura. El conjunto de valores propios para el problema de Steklov es el mismo que el conjunto de valores propios para la función Dirichlet-Neumann. Esta función asocia a cada función u definida sobre ∂M, la derivada normal de su extensión armónica $\hat{u}$ sobre M. El conjunto de valores propios del problema de Steklov consiste de una sucesión creciente $0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$, con

$\nu_k \to +\infty$. El primer valor propio no nulo es conocido como el primer valor propio del problema de Steklov; este valor propio está caracterizado variacionalmente por

$$\nu_1 = \min_{\varphi} \left\{ \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 \, dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma} : \varphi \in C^\infty(\overline{M}), \int_{\partial M} \varphi d\sigma = 0 \right\}. \tag{2}$$

En [1] (pág. 26) Escobar hace una prueba detallada de la existencia del mínimo. Para la bola unitaria $B^n \subset \mathbb{R}^n$, los valores propios de la función Dirichlet-Neumann son $\nu_k = k$, $k = 0, 1, 2, ...$, y las funciones propias están dadas por el espacio de polinomios armónicos homogéneos de grado k restringidos a la esfera ∂B^n. Las funciones coordenadas $\{x_1, \cdots, x_n\}$ son funciones armónicas con grado de homogeneidad uno, ellas son funciones propias correspondientes al primer valor propio de Steklov sobre la bola unitaria. El primer valor propio de Steklov sobre la bola n-dimensional de radio $r > 0$, B_r, es $\nu_1(B_r) = \frac{1}{r}$ y las funciones coordenadas son las respectivas funciones propias.

Al igual que en el problema de Dirichlet y de Neumann en el problema de Steklov se han hecho estimativos geométricos para el primer valor propio. Para dominios acotados y simplemente conexos en el plano xy, en 1954 Weinstock [8] demostró que $\nu_1 \leq \frac{2\pi}{L}$, donde L representa el perímetro de la curva frontera, con igualdad si y sólo si M es un círculo. En 1970 para dominios convexos en el plano, Payne [5] demostró que $\nu_1 \geq k_o$, donde k_o es el valor mínimo de la curvatura sobre el borde del dominio. En el año 1997, Escobar [2] generalizó el resultado de Payne a variedades riemannianas 2-dimensionales con curvatura gaussiana no-negativa y con borde tal que la curvatura geodésica k_g estuviera acotada inferiormente por una constante positiva k_o. Con estas hipótesis Escobar demuestra que $\nu_1 \geq k_o$. Para dimensiones altas, Escobar considera variedades compactas de curvatura de Ricci no negativa y otra vez en el espíritu del teorema de Payne demuestra el siguiente teorema:

Si M es una variedad riemanniana compacta n-dimensional ($n \geq 3$) con curvatura de Ricci no negativa, frontera no vacía ∂M y cuya segunda forma fundamental π sobre ∂M satisface $\pi \geq kI$ para alguna constante positiva k, entonces

$$\nu_1 > \frac{k}{2}.$$

Para métricas rotacionalmente invariantes con curvatura de Ricci no-negativa en la bola n-dimensional B_r nosotros [3] demostramos que $\nu_1 \geq h$ donde h es la curvatura media sobre ∂B_r. Para métricas rotacionalmente invariantes con curvatura de Ricci no-positiva en la bola n-dimensional B_r nosotros [4] demostramos que $\nu_1 \leq h$ donde h es la curvatura media sobre ∂B_r.

En este artículo nosotros encontramos una cota superior para el primer valor propio de Steklov en un dominio del espacio euclídeo.

2 Preliminares

Sea M un dominio de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave, ∂M.

$$\mathcal{O}(n) = \left\{A \in M^{n\times n} : AA^T = I\right\},$$

denota el grupo de matrices ortogonales de orden $n \times n$. $(M - b)$ donde $b \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto definido por:

$$(M - b) := \{y \in \mathbb{R}^n : y = x - b, x \in M\}$$

y AM donde $A \in \mathcal{O}(n)$ es el conjunto definido por:

$$AM := \{y \in \mathbb{R}^n : y = Ax, x \in M\}.$$

El centro de masa de ∂M está dado por:

$$cm(\partial M) := \frac{\int\limits_{\partial M} x d\sigma}{\int\limits_{\partial M} d\sigma}. \tag{3}$$

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que para toda función coordenada x_i, se satisface que

$$\int\limits_{\partial M} x_i d\sigma = 0, i = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

Si para M no se tiene la condición (4), es fácil comprobar que se tiene para M', donde $M' = (M - cm(\partial M))$.

Además puesto que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial(AM)} x_i d\sigma_x &= \int\limits_{\partial(AM)} \langle x, e_i\rangle\, d\sigma_x \\ &= \int\limits_{\partial M} \langle Ay, e_i\rangle\, d\sigma_y\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\partial M} \left\langle y, A^T e_i \right\rangle d\sigma_y$$
$$= \int\limits_{\partial M} \sum_j a_{ij} y_j d\sigma_y$$
$$= \sum_j a_{ij} \int\limits_{\partial M} y_j d\sigma_y,$$

entonces si para M se cumple la condición (4), también se cumple para (AM).

Diremos que una función u es admisible para el problema de Steklov sobre M si

$$\int\limits_{\partial M} u d\sigma = 0, \tag{5}$$

en tal caso de la caracterización variacional (2) se deduce que

$$\nu_1 \leq \frac{\int\limits_{M} |\nabla u|^2 \, dv}{\int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma}.$$

3 Resultados

Lema 3.1. *El primer valor propio para Steklov sobre M es igual al primer valor propio de Steklov sobre $A(M-b)$, es decir, $\nu_1(M) = \nu_1(A(M-b))$. Además u es función propia para el primer valor propio de Steklov sobre M si y sólo si $v(x) = u(A^T x + b)$ es función propia para el primer valor propio de Steklov sobre $A(M-b)$, donde b es el centro de masa para ∂M.*

Demostración. Puesto que

$$\int\limits_{\partial(A(M-b))} v(x) d\sigma_x = \int\limits_{\partial(A(M-b))} u(A^T x + b) d\sigma_x$$
$$= \int\limits_{\partial(M-b)} u(y+b) d\sigma_y$$
$$= \int\limits_{\partial M} u(z - b + b) d\sigma_z$$

$$= \int_{\partial M} u(z) d\sigma_z,$$

se concluye que u es admisible para M si y sólo si $v(x) = u(A^T x + b)$ es admisible para $A(M - b)$.

De la igualdad:

$$\frac{\int\limits_{A(M-b)} |\nabla v(x)|^2 \, dv_x}{\int\limits_{\partial(A(M-b))} v^2(x) d\sigma_x} = \frac{\int\limits_{M} |A \nabla u(y)|^2 \, dv_y}{\int\limits_{\partial M} u^2(y) d\sigma_y}$$

$$= \frac{\int\limits_{M} |\nabla u(y)|^2 \, dv_y}{\int\limits_{\partial M} u^2(y) d\sigma_y} = \nu_1(M),$$

y la caracterización variacional (2) para el primer valor propio de Steklov sobre $(A(M - b))$ se deduce que

$$\nu_1(A(M - b)) \leq \nu_1(M).$$

De igual manera si v es función propia para $(A(M - b))$, entonces $u(x) = v(A(x - b))$ es admisible para M y de la caracterización variacional para el primer valor propio de Steklov sobre M se deduce que

$$\nu_1(M) \leq \nu_1(A(M - b)).$$

Lema 3.2. *Sea M' un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $M = M' - b$ donde $b = cm(\partial M)$. Entonces existe $A \in \mathcal{O}(n)$ tal que*

$$\int\limits_{(AM)} \frac{2}{|x|} (\sum_{i<j} x_i x_j) dv \geq 0. \tag{6}$$

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que para toda $A \in \mathcal{O}(n)$

$$F(A) = \int\limits_{(AM)} \frac{2}{|x|} (\sum_{i<j} x_i x_j) dv < 0.$$

Sea $f(x) = (2 \sum_{i<j} x_i x_j)$, $g_k(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} x_k x_j$ y $E_k \in \mathcal{O}(n)$ la matriz elemental que se obtiene al multiplicar por (-1) la k-ésima fila de la matriz identidad. Puesto que

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x) = f(x),$$

entonces

$$\int\limits_{(AM)} \frac{1}{|x|}(\sum_{k=1}^{n} g_k(x))d\upsilon = F(A) < 0, \tag{7}$$

para toda $A \in \mathcal{O}(n)$. De (7) se deduce que para toda $A \in \mathcal{O}(n)$ existe $\alpha \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$G_\alpha = \int\limits_{(AM)} \frac{1}{|x|} g_\alpha(x) d\upsilon < 0. \tag{8}$$

Debido a que $g_\alpha(E_\alpha x) = -g_\alpha(x)$ y $g_k(E_\alpha x) = g_k(x) - 2x_\alpha x_k$, para $\alpha \neq k$ se infiere que

$$\begin{aligned}
F(E_\alpha A) &= \int\limits_{(E_\alpha AM)} \frac{1}{|x|}(\sum_{k=1}^{n} g_k(x))d\upsilon \\
&= \int\limits_{(AM)} \frac{1}{|E_\alpha x|}(\sum_{k=1}^{n} g_k(E_\alpha x))d\upsilon \\
&= \int\limits_{(AM)} \frac{1}{|x|}(\sum_{k=1}^{n} g_k(E_\alpha x))d\upsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{(AM)} \frac{1}{|x|}(-3g_\alpha(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\alpha}}^{n} g_k(x))d\upsilon \\
&> \int\limits_{(AM)} \frac{1}{|x|}(g_\alpha(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\alpha}}^{n} g_k(x))d\upsilon \\
&= F(A).
\end{aligned}$$

Podemos entonces construir una sucesión estrictamente creciente

$$\begin{aligned}
x_0 = F(I) &< x_1 = F(E_{\alpha_1}) \\
&< x_2 = F(E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}) \\
&< \cdots \\
&< x_m = F(E_{\alpha_m} \cdots E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}).
\end{aligned}$$

Las matrices elementales E_α conmutan entre si y satisfacen que $E_\alpha E_\alpha = I$, se puede por lo tanto concluir que después de n-pasos se han usado todas las matrices disponibles y

$$x_0 = F(I) < x_n = F(E_{\alpha_n} \cdots E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}) = F(E_1 \cdots E_{n-1} E_n) = F(-I) = x_0.$$

Tenemos una contradicción y por tanto el supuesto inicial es falso.

Teorema 3.3. *Sea M un dominio de $\mathbb{R}^n$. Si existe una bola $B_r(b)$ de radio $r > 0$ y centro en $b = cm(\partial M)$ con $B_r(b) \subseteq M$, entonces el primer valor propio de Steklov sobre M satisface la desigualdad:*

$$\nu_1(M) \leq \frac{1}{r} = \nu_1(B_r). \tag{9}$$

Demostración. De los lemas anteriores no hay pérdida de generalidad si suponemos que la frontera de M tiene el centro de masa en el origen y se cumple la desigualdad (6) para M. Del teorema de la divergencia si

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \cdots, x_n), \\ u &= \frac{(x_1 + \cdots + x_n)}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

y η es normal unitaria exterior se tiene

$$\begin{aligned} \int\limits_{M-B_r} div(u^2 \frac{x}{|x|}) dv &= \int\limits_{\partial(M-B_r)} u^2 \left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle d\sigma \\ &= \int\limits_{\partial M} u^2 \left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle d\sigma - \int\limits_{\partial B_r} u^2 \left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Despejando se sigue que

$$\int\limits_{\partial M} u^2 \left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle d\sigma = \int\limits_{\partial B_r} u^2 \left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle d\sigma + \int\limits_{M-B_r} div(u^2 \frac{x}{|x|}) dv.$$

Puesto que $\left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle \leq 1$ sobre ∂M y $\left\langle \frac{x}{|x|}, \eta \right\rangle = 1$ sobre ∂B_r, entonces

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma &\geq \int\limits_{\partial B_r} u^2 d\sigma + \int\limits_{M-B_r} \left\{ u^2 div(\frac{x}{|x|}) + 2u \left\langle \nabla u, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right\} dv \\ &= \int\limits_{\partial B_r} u^2 d\sigma + \int\limits_{M-B_r} \left\{ u^2 (\frac{n-1}{|x|}) + 2u \left\langle \nabla u, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right\} dv \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\partial B_r} u^2 d\sigma + \int\limits_{M-B_r} \left\{ u^2 (\frac{n-1}{|x|}) + 2\frac{u^2}{|x|} \right\} dv,$$

es decir:

$$\int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma \geq \int\limits_{\partial B_r} u^2 d\sigma + \int\limits_{M-B_r} \frac{(n+1)}{|x|} u^2 dv. \tag{10}$$

Puesto que u es precisamente la primera función propia para Steklov sobre B_r asociada al valor propio $\frac{1}{r}$, se tiene que:

$$\int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma \geq r \int\limits_{B_r} |\nabla u|^2 dv + \int\limits_{M-B_r} \frac{(n+1)}{|x|} u^2 dv$$

$$= r \int\limits_{B_r} |\nabla u|^2 dv + \frac{(n+1)}{n} \int\limits_{M-B_r} \frac{1}{|x|} \left\{ |x|^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j \right\} dv.$$

De la desigualdad (6):

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma \geq & r \int\limits_{B_r} |\nabla u|^2 dv + \frac{(n+1)}{n} \int\limits_{M-B_r} |x| \, dv \\ \geq & r \int\limits_{B_r} |\nabla u|^2 dv + \frac{(n+1)}{n} r \int\limits_{M-B_r} dv \\ = & r \int\limits_{B_r} |\nabla u|^2 dv + \frac{(n+1)}{n} r \int\limits_{M-B_r} |\nabla u|^2 dv \\ \geq & r \int\limits_{M} |\nabla u|^2 dv. \end{aligned}$$

De la caracterización variacional de $\nu_1(M)$,

$$\nu_1(M) \leq \frac{\int\limits_{M} |\nabla u|^2 dv}{\int\limits_{\partial M} u^2 d\sigma} \leq \frac{1}{r}.$$

4 Conclusiones

En este trabajo se obtuvo una cota superior para el primer valor propio de Steklov en dominios del espacio euclídeo. Así por ejemplo en el caso de que el borde de M sea un elipsoide $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$, con $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, se puede concluir que $\nu_1(M) \leq \frac{1}{a_1}$. Una cota inferior semejante es encontrada por Bramble y Payne en [6].

Referencias bibliográficas

[1] J. F. Escobar (2002). *Topics in PDE's and Dierential Geometry*, *XII Escola de Geometra Diferencial, Goiana/Ed. da UFG, Brazil*.

[2] J. F. Escobar (1997). *The Geometry of the rst Non-Zero Steklo Eigenvalue, Journal of functional analysis*, 150, 544-556.

[3] O . A . Montaño (2013). *The Steklo Problem f or Rotationally Invariant Metrics on the Ball, R evista C olombiana de Matemáticas*, 47, 2, 181-190.

[4] O. A. Montaño (2013). *Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov, Revista Integracion*, 31, 1, 53-58.

[5] L. E. Payne (1970). *Some Isoperimetric Inequalities for Harmonic Functions, SIAM J. Math. Anal*., 1, 354-359.

[6] J. H. Bramble, L. E. Payne (1962). *Bounds i n t he Neumann P roblem for Second Orden Uniformly Elliptic Operators, Pacic Journal of Mathematics*, vol 12, 3, 823-833.

[7] M. W. Steklo (1902). *Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique, Ann. Sci. cole Norm*, 19, 445 - 490.

[8] R. Weinstock (1954). Inequalities for a Classical Eigenvalue Problem, Rational Mech. Anal, 3, 745 - 753.

Dirección del autor

Óscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Matematicas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
oscar.montano@correounivalle.edu.co