Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN ABIERTA PARA FUNCIONES MULTIVALUADAS CONVEXAS

Diana Ximena Narváez **Guillermo Restrepo**
Universidad del Valle

Recibido: septiembre 3, 2013 Aceptado: diciembre 9, 2013

Págs. 67-93

Resumen

El teorema usual de la función abierta de Banach-Schauder afirma que toda función lineal, continua y epiyectiva de un espacio de Banach en otro, es abierta. Este teorema originalmente demostrado por Banach en 1932, lo demuestra nuevamente R. Megginson en [5] utilizando el lema de Zabreiko [10]. Seguiremos un procedimiento similar para demostrar que toda función multivaluada con valores cerrados, convexa, semicontinua superiormente y epiyectiva, es una función abierta. Ideas parecidas se utilizan para demostrar un teorema de gráfica cerrada para procesos convexos y cerrados en términos de semicontinuidad inferior.

Palabras clave: función multivaluada, procesos convexos, semicontinuos superiormente y epiyectivos, y condiciones de Lipschitz.

Abstract

The usual open mapping theorem of Banach-Schauder affirms that every linear, continuous and surjective open mapping from a Banach Space into another, is open. This theorem originally proved by Banach in 1932, is proved again by R. Megginson in [5] using Zabreiko's lemma [10]. We will follow a similar aproach to prove that every multivalued function with closed values, convex, upper semicontinuos and surjective is an open mapping. Similar ideas are used to prove a closed graph theorem for a closed convex process in terms of lower semicontinuity.

Keywords: multivalued function, processes which are convex, upper semicontinuos and surjective, and Lipschitz condition.

1 Introducción

El estudio de las funciones multivaluadas cobró gran importancia a partir de 1960 debido a su introducción en la modelación de los sistemas económicos y el estudio de los problemas inherentes a la existencia de un equilibrio general. El texto de Debreu G. [4] es en este sentido, paradigmático. El texto de Aubin y Frankowska [1] es una síntesis afortunada del desarrollo del análisis multivaluado hasta el presente.

El teorema de la función abierta, en el lenguaje de hoy, expresa que si X y Y son espacios de Banach (normados y completos) y $f : X \to Y$ es una función lineal, continua y epiyectiva, entonces esta función es abierta. Es decir, para todo conjunto abierto $A \subseteq X$, $f(A) \subseteq Y$ es un conjunto abierto. Este teorema es demostrado por S. Banach en ([2] páginas 38-40), pero se le atribuye a Schauder [8]. El teorema de la gráfica cerrada, en el lenguaje de hoy, expresa que si X y Y son espacios de Banach y $f : X \to Y$ es una función lineal cerrada, entonces esta función es continua. Este teorema es demostrado por S. Banach en ([2] página 41).

En este artículo enunciaremos y demostraremos dos teoremas similares a los anteriormente enunciados que llamaremos, respectivamente, teorema de la función abierta y teorema de la gráfica cerrada para las funciones multivaluadas convexas. Sus enunciados son así:

(A) Teorema de la función abierta para las funciones multivaluadas convexas. Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada convexa, semicontinua superiormente, epiyectiva y con valores cerrados. Entonces f es una función abierta.

(B) Teorema de la gráfica cerrada para los procesos convexos. Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada cuyo dominio efectivo es X ($f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$). Si esta función es un proceso convexo y cerrado, entonces es semicontinuo inferiormente.

Teoremas similares con hipótesis diferentes se registran en muchos trabajos recientes [1], [7] y [9]. Quisiéramos destacar que los métodos demostrativos que utilizamos basados en el Lema de Zabreiko [5] y [10] no aparecen en la literatura.

Unas definiciones son pertinenentes ahora para explicar el contenido y alcance de estos teoremas, antes de indicar el procedimiento escogido para las demostraciones.

Una función multivaluada de un conjunto X en un conjunto Y es una correspondencia $x \mapsto f(x)$ que a cada $x \in X$ le asigna un subconjunto $f(x)$ del conjunto Y. Es posible que el conjunto $f(x)$ sea el conjunto vacío. El dominio efectivo de esta función es el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \neq \emptyset$. La gráfica de la función multivaluada f es el conjunto $\gamma(f)$ de las parejas $(x, y) \in X \times Y$ tales que $y \in f(x)$. Supongamos ahora que X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función multivaluada. Diremos que esta función es semicontinua superiormente en $x_0 \in X$ si para todo conjunto abierto W que contenga a $f(x_0)$, existe un conjunto abierto V que contiene a x_0 tal que $f(x) \subseteq W$ para todo $x \in V$. Es semicontinua superiormente si lo es en cada punto $x_0 \in X$. Diremos que es **semicontinua inferiormente** en $x_0 \in X$ si para todo conjunto abierto W en Y que intercepte a $f(x_0)$ existe un conjunto abierto V que contiene a x_0 tal que $f(x) \cap W \neq \emptyset$ para todo $x \in V$. Es semicontinua inferiormente si lo es en cada punto $x_0 \in X$. La función multivaluada f es cerrada si su gráfica $\gamma(f)$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$ con la topología producto. Esta función es de valores cerrados si $f(x)$ es un subconjunto cerrado de Y para todo $x \in X$.

En los espacios de Banach hay unos conceptos especiales que definiremos en seguida. Recordemos que un subconjunto C de un espacio vectorial Γ es un cono si $0 \in C$ y $tx \in C$ para todo $t > 0$ y todo $x \in C$.

Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada. Esta función es convexa si su gráfica $\gamma(f)$ es un subconjunto convexo de $X \times Y$. Es un proceso si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda > 0$ y todo $x \in X$, y $0_Y \in f(0_X)$. Es decir, f es un proceso si y sólo si su gráfica $\gamma(f)$ es un cono. Un proceso es lineal si su gráfica $\gamma(f)$ es un subespacio.

Hacemos notar que demostraremos versiones del teorema de la función abierta y de la gráfica cerrada que recuerdan las versiones de los teoremas de la función abierta y de la gráfica cerrada en el caso de las funciones lineales monovaluadas. Pero la conclusión que f es una función abierta se puede obtener de otras hipótesis. Por ejemplo, J. Aubin y H. Frankowska, suponiendo que f es un proceso cerrado, convexo y epiyectivo, demuestran que $f^{-1} : Y \to X$ es una función lipschitziana y de aquí se deduce sin dificultad que f es una función abierta ([1], Teorema 2.2.1, página 57).

En cuanto al método de demostración de los teoremas (A) y (B), utilizaremos el lema de Zabreiko [10], tal como lo hace R. Megginson en ([5] p. 44) para demostrar el teorema de la función abierta para las funciones monovaluadas. El lema de Zabreiko expresa que las seminormas numerablemente subaditivas en un espacio de Banach son continuas.

Finalmente, haremos una breve descripción del artículo. En la sección 2 definiremos los procesos convexos y cerrados. En la sección 3 demostraremos el teorema de la función abierta de Schauder y de la gráfica cerrada para las funciones monovaluadas. En la sección 4 se demuestra el teorema (A) de la función abierta para procesos convexos, superiormente semicontinuos y epiyectivos y el teorema (B) de la gráfica cerrada. En la sección 5 se demuestra el teorema de la función abierta para las funciones multivaluadas convexas, semicontinuas superiormente, epiyectivas y con valores cerrados. En la sección 6 se analizan los problemas relacionados con la continuidad de la función inversa en términos de condiciones de Lipschitz.

2 Procesos convexos y cerrados

La definición de proceso cerrado y convexo se dió en la introducción. Lo nuevo en esta sección es que se muestran propiedades básicas de tales procesos.

Definición 2.1 Sean X, Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada:

- Esta función es *convexa* si su gráfica $\gamma(f) \subset X \times Y$ es convexa.
- Esta función es *cerrada* si su gráfica $\gamma(f)$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$.
- Esta función es un *proceso* si su gráfica $\gamma(f)$ es un cono.
- Esta función es un *proceso lineal* si su gráfica $\gamma(f)$ es un subespacio.

- Esta función es un *proceso convexo y cerrado* si su gráfica $\gamma(f)$ es un cono convexo y cerrado.

Los enunciados siguientes están sin demostraciones en ([1] p.57). Realizamos las demostraciones para comodidad del lector.

Teorema 2.2 *Una función multivaluada $f: X \to Y$ es convexa si y sólo si*

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \subseteq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \text{ para todo } x, y \in X \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (1)$$

Demostración. Supongamos que f es una función multivaluada convexa y demostremos (1). Sea $z = z_1 + z_2 \in \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ con $z_1 \in \lambda f(x)$ y $z_2 \in (1-\lambda) f(y)$.

Entonces $z_1 = \lambda a \in \lambda f(x)$ para cierto $a \in f(x)$ y $z_2 = (1-\lambda) b$ para cierto $b \in f(y)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Es claro que (x, a), $(y, b) \in \gamma(f)$ y por tanto

$$\lambda(x, a) + (1-\lambda)(y, b) \in \gamma(f) \text{ y } 0 \leq \lambda \leq 1$$

puesto que $\gamma(f)$ es conjunto convexo. Pero

$$\lambda(x, a) + (1-\lambda)(y, b) = (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda a + (1-\lambda) b) = (\lambda x + (1-\lambda) y, z)$$

y por consiguiente

$$(\lambda x + (1-\lambda) y, z) \in \gamma(f).$$

En consecuencia $z \in f(\lambda x + (1-\lambda) y)$. Hemos demostrado (1).

Ahora supongamos que (1) es cierto y demostremos que f es convexa, es decir $\gamma(f)$ es un conjunto convexo de $X \times Y$. Sean (x, a), $(y, b) \in \gamma(f)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $a \in f(x)$, $b \in f(y)$ y por tanto

$$\lambda a + (1-\lambda) b \in \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \text{ con } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

De (1) tenemos que

$$\lambda a + (1-\lambda) b \in f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

y en consecuencia

$$(\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda a + (1-\lambda) b) \in \gamma(f).$$

Por tanto

$$\lambda(x, a) + (1-\lambda)(y, b) = (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda a + (1-\lambda) b) \in \gamma(f).$$

Teorema 2.3 *Una función multivaluada f: $X \to Y$ es un proceso si y sólo si para todo $x \in X$ y todo $\lambda > 0$, $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ y $0_Y \in f(0_X)$.*

Demostración. Supongamos que f es un proceso y demostremos que $\lambda f(x) \subseteq f(\lambda x)$. Sea $z \in \lambda f(x)$. Entonces $z = \lambda a$ para algún $a \in f(x)$ y por tanto $(x, a) \in \gamma(f)$. Como $\gamma(f)$ es un cono por la definición de proceso, se sigue que

$$\lambda(x,a) = (\lambda x, \lambda a) \in \gamma(f)$$

y por consiguiente $\lambda a = z \in f(\lambda x)$. Hemos demostrado así que $\lambda f(x) \subseteq f(\lambda x)$.

Demostremos que $f(\lambda x) \subseteq \lambda f(x)$. Sea $z \in f(\lambda x)$. Entonces $(\lambda x, z) \in \gamma(f)$ y como $\gamma(f)$ es un cono,

$$\lambda^{-1}(\lambda x, z) = \left(x, \lambda^{-1} z\right) \in \gamma(f).$$

Hemos así demostrado que $\lambda^{-1} z \in f(x)$ y por tanto $z \in \lambda f(x)$. Hasta ahora hemos demostrado que si f es un proceso entonces $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda > 0$. Resta demostrar que $0_Y \in f(0_X)$. Como $\gamma(f)$ es un cono, entonces $(0_X, 0_Y) \in \gamma(f)$ y por tanto $0_Y \in f(0_X)$.

Supongamos ahora que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ y $0_Y \in f(0_X)$ si $\lambda > 0$ y $x \in X$, y demostremos que f es un cono. Sea $(x,y) \in \gamma(f)$. Entonces $y \in f(x)$ y $\lambda y \in \lambda f(x) = f(\lambda x)$. Luego $(\lambda x, \lambda y) \in \gamma(f)$. Además $(0_X, 0_Y) \in \gamma(f)$. Hemos demostrado así que $\gamma(f)$ es un cono.

Definición 2.4 Sean X, Y espacios de Banach y $f: X \to Y$ una función multivaluada:

A) Esta función es *homogénea* si para todo $x \in X$ y todo $\lambda > 0$, $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ y $0_Y \in f(0_X)$. Es decir si gráfica es un cono.

B) Esta función es *subaditiva* si $f(x) + f(y) \subseteq f(x+y)$ para todo $x, y \in X$.

Teorema 2.5 *Una función multivaluada $f: X \to Y$ es un proceso convexo si y sólo si es homogénea y subaditiva.*

Demostración. Supongamos que f es un proceso convexo. Esto implica, por el teorema 2.3, que es homogénea. Demostremos que es subaditiva. Sean $x, y \in X$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \subseteq f(\lambda x + (1-\lambda) y).$$

Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$ entonces

$$\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \subseteq f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right).$$

Pero

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2} f(x+y)$$

puesto que f es homogénea por ser un proceso.

Luego

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \subseteq \frac{1}{2} f(x+y) \text{ y por tanto } f(x) + f(y) \subseteq f(x+y).$$

Ahora supongamos que f es homogénea y subaditiva y veamos que f es un proceso convexo. Por el teorema 2.3 tenemos que f es un proceso, y resta demostrar que su gráfica $\gamma(f)$ es un conjunto convexo. Es claro que

$$\begin{aligned} f(\lambda x+(1-\lambda)y) &\supseteq f(\lambda x)+f((1-\lambda)y) \text{ por } B \\ &= \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \text{ por } A. \end{aligned}$$

Corolario 2.6 *Si $f : X \to Y$ es un proceso convexo y B es convexo, entonces $f(B)$ es convexo.*

3 El teorema de la función abierta tradicional de Banach-Schauder para las funciones monovaluadas

Demostraremos que si f es una función lineal, continua y epiyectiva de un espacio de Banach X en otro espacio de Banach Y, entonces es una función abierta. Aunque parezca redundante, esta demostración, según el procedimiento utilizado por R. Megginson en [5], ejemplifica el método demostrativo que utilizaremos en el caso de las funciones multivaluadas en las secciones siguientes. Esto justifica la inclusión en el artículo.

Definición 3.1 Un subconjunto D de un espacio vectorial Y es absorbente si para todo $y \in Y$ existe un $s > 0$ tal que $sy \in D$.

Observaciones 3.2

1) Si D es absorbente, entonces $0_Y \in D$. En efecto, si $y = 0$ entonces existe un s tal que $sy = 0 \in D$.

2) Es fácil ver que si D es convexo y $sy \in D$, con $s > 0$, entonces $ty \in D$ si $0 < t < s$. En efecto, $ty = \left(ts^{-1}\right) sy$. Si $ts^{-1} = r$, entonces $0 < r < 1$ y $(1-r)\,0_Y + r\,(sy) = ty \in D$.

Teorema 3.3 *(Megginson, 1998 [5]) Todo subconjunto convexo, cerrado y absorbente de un espacio de Banach es una vecindad de cero.*

Demostración. La demostración es una variante de la ofrecida en el texto citado. Sea D un subconjunto cerrado, convexo y absorbente del espacio de Banach Y. El conjunto $E = D \cap (-D)$ es convexo, cerrado y absorbente. Además es simétrico, es decir, si $x \in E$, entonces $-x \in E$. Como E es convexo y absorbente, para todo $y \in Y$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^{-1}y \in E$ y por tanto $y \in nE$. Hemos demostrado que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nE$. Como Y es un espacio métrico completo, por el teorema de Baire $\operatorname{int}(nE) \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $a \in \operatorname{int}(nE)$, entonces $n^{-1}a \in E$ porque la función $y \mapsto \lambda y$ es un homeomorfismo para todo $\lambda \neq 0$. Hemos demostrado que $\operatorname{int}(E) \neq \emptyset$. Como $\operatorname{int}(E)$ es un conjunto abierto no vacío, entonces

$$U = \frac{1}{2}\operatorname{int}(E) + \frac{1}{2}\operatorname{int}(-E) \text{ es un conjunto abierto.}$$

Además

$$0 \in U = \frac{1}{2}\operatorname{int}(E) + \frac{1}{2}\operatorname{int}(-E) \subseteq \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}(-E) = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}E \subseteq E \subseteq D$$

puesto que E es convexo y por tanto $\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}E \subseteq E$.

Lema 3.4 *(de Bourbaki) Sean X, Y espacios de Banach y $f: X \to Y$ lineal, continua y epiyectiva. Si V es una vecindad de 0_X, entonces $\overline{f(V)}$ es una vecindad de 0_Y. (ver Bourbaki [3], Lemme1, I.18)*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ tal que $\{x \in X: \|x\| < \epsilon\} = W \subseteq V$. Lo primero que demostraremos es que $D = \overline{f(W)}$ es un conjunto convexo, cerrado y absorbente.

i) $f(W)$ es convexo. Sean $y, z \in f(W)$. Tenemos que demostrar que

$$ty + (1-t)z \in f(W) \text{ con } 0 \leq t \leq 1.$$

En efecto, existen $a, b \in W$ tales que $y = f(a)$ y $z = f(b)$ y por linealidad de f

$$f(ta + (1-t)b) = ty + (1-t)z \in f(W)$$

porque $ta + (1-t)b \in W$.

ii) $D = \overline{f(W)}$ es convexo. En efecto, la adherencia de cualquier conjunto convexo es convexo.

iii) D es absorbente. Sea $y \in Y$. Como f es epiyectiva, existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Como W es absorbente, existe un $s > 0$ tal que $sx \in W$ y por tanto

$$f(sx) = sf(x) = sy \in f(W) \subseteq \overline{D}.$$

Por el teorema 3.3, $\overline{f(W)} = D$ es una vecindad de cero y por tanto $\overline{f(V)} \supseteq D$ es una vecindad de cero.

Definición 3.5 Sea X un espacio vectorial. Una función $p: X \to \mathbb{R}$ es **subaditiva** si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$; es **positivamente homogénea** si $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $\lambda > 0$; es **sublineal** si es subaditiva y positivamente homogénea; es una **seminorma** si es subaditiva y $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Si p es sublineal, entonces $p(0) = 0$. Se demuestra fácilmente que toda función sublineal es convexa. Una condición suficiente para que $p(0) = 0$ es que p sea positivamente homogénea.

Observación 3.6 Sea p una función subaditiva.

1) Por inducción se demuestra que

$$p\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p\left(x_k\right). \tag{2}$$

2) Si X es un espacio normado, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable y p es continua y positiva, entonces

$$p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} p\left(x_n\right). \tag{3}$$

Una función $p : X \to \mathbb{R}$ es σ-subaditiva si satisface la condición (3) para toda sucesión sumable $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) No es cierto en general que una función σ-subaditiva sea continua. Se requiere hipótesis adicionales como las que hacen parte del lema siguiente.

Teorema 3.7 *(lema de Zabreiko [10]) Toda función sublineal σ-subaditiva y positivamente definida ($p(x) \geq 0$ para todo x) en un espacio de Banach es continua.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach, $p : X \to \mathbb{R}$ una función sublineal σ-subaditiva y positiva. Sea $T = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Este conjunto es convexo y absorbente y por tanto $\overline{T}$ es convexo, cerrado y absorbente. Por el teorema 3.3, $\overline{T}$ es una vecindad de cero y por tanto existe un $r > 0$ tal que $\{x \in X : \|x\| < r\} = B_r \subseteq \overline{T}$. Demostraremos que para todo $\epsilon > 0$ existe un δ tal que $0 < \delta < r$ y $p(x) < \epsilon$ si $\|x\| < \delta$. Sea $x \in B_r$. Como $B_r \subseteq \overline{T}$, existe un $x_1 \in T$ tal que $\|x - x_1\| < 2^{-1}r$. Ahora,

$$x - x_1 \in 2^{-1}B_r \subseteq 2^{-1}\overline{T} = \overline{2^{-1}T}$$

y por tanto existe un $x_2 \in 2^{-1}T$ tal que

$$\|x - x_1 - x_2\| < 2^{-2}r.$$

Avanzando un paso más en el proceso, existe un $x_3 \in 2^{-2}T$ tal que

$$\|x - x_1 - x_2 - x_3\| < 2^{-3}r.$$

Continuando con el proceso inductivo se construye una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_n \in 2^{-(n-1)}T \quad \text{y} \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| < 2^{-n}r.$$

Se deduce entonces que

$$p\left(x_n\right) < 2^{-(n-1)} \text{ para todo } n \text{ y } x = \sum_{n} x_n.$$

Como p es σ-subaditiva, se concluye que

$$p(x) \leq \sum_n p(x_n) < \sum_n 2^{-(n-1)} = 2 \text{ para todo } x \in B_r.$$

Podemos ahora terminar la demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \frac{r\epsilon}{2}$. Luego $\|x\| < \delta$ implica $\left\|\left(\frac{2}{\epsilon}\right)x\right\| < r$ y por tanto

$$p\left(\left(\frac{2}{\epsilon}\right)x\right) < 2 \text{ y } p(x) < \epsilon.$$

Hemos demostrado que p es continua en $x = 0$. De lo anterior se deduce que p es continua. En efecto, sea $a \in X$ y demostremos que p es continua en a. Para demostrarlo, sea $\epsilon > 0$. Existe un $r > 0$ tal que $p(x) < \epsilon$ si $\|x\| < r$. Ahora si $\|x\| < r$ entonces

$$p(a+x) \leq p(a) + p(x) < p(a) + \epsilon \text{ y } p(a+x) - p(a) < \epsilon.$$

Por otro lado, $a = (a+x) + (-x)$ y si $\|x\| < r$, entonces

$$p(a) \leq p(a+x) + p(-x) < p(a+x) + \epsilon \text{ y } p(a) - p(a+x) < \epsilon.$$

En suma,

$$|p(a+x) - p(a)| < \epsilon \text{ si } \|x\| < r,$$

lo que demuestra que p es continua en a.

Teorema 3.8 *Sean X y Y espacios de Banach. Si $f: X \to Y$ es una función lineal, continua y epiyectiva, entonces la función $p: Y \to \mathbb{R}$ definida por*

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) = \text{ínf}\left\{\|x\| : x \in f^{-1}(y)\right\}$$

es una seminorma σ-subaditiva y continua. Además, si

$$U = \{x \in X : \|x\| < 1\} \text{ entonces } f(U) = \{y \in Y : p(y) < 1\}$$

es un conjunto abierto y convexo.

Demostración. Como f es epiyectiva, para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y por tanto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$.

i) Es inmediato que $p \geq 0$.

ii) p es una seminorma. Si $y \in Y$, sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Entonces

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$$

y por tanto

$$p(\lambda y) \leq \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ para todo } x \in f^{-1}(y),$$

lo que implica que $p(\lambda y) \leq |\lambda| p(y)$. Ahora, por lo que acabamos de demostrar,

$$p(y) = p\left(\lambda^{-1}(\lambda y)\right) \leq \left|\lambda^{-1}\right| p(\lambda y) \quad \text{y} \quad |\lambda|\, p(y) \leq p(\lambda y).$$

Hemos demostrado que $p(\lambda y) = |\lambda|\, p(y)$. Demostremos que p es subaditiva. Sean $u, v \in Y$ y sea $\epsilon > 0$. Existen $a \in f^{-1}(u)$ y $b \in f^{-1}(v)$ tales que

$$\|a\| < p(u) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \|b\| < p(v) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $f(a+b) = f(a) + f(b) = u + v$, entonces

$$p(u+v) \leq \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| < p(u) + p(v) + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

lo que significa que $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$. Finalmente, demostremos que $p(0) = 0$. Si $\lambda > 0$, entonces $p(\lambda 0) = \lambda p(0) = p(0)$ y no es posible que $p(0) > 0$ pues si $\lambda = 2$ entonces $2 = 1$, lo que es una contradicción.

iii) p es σ-subaditiva. Para demostrar este enunciado, sea $\sum_n y_n$ una serie convergente en Y y demostremos que

$$p\left(\sum_n y_n\right) \leq \sum_n p(y_n).$$

Si $\sum_n p(y_n) = \infty$, el enunciado es obvio. Supongamos que $\sum_n p(y_n) < \infty$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada y_n existe un x_n tal que $y_n = f(x_n)$ y

$$\|x_n\| \leq p(y_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \text{ y por tanto la serie } \sum_n \|x_n\| \text{ es convergente.}$$

Ello implica que la serie $\sum_n x_n$ es convergente. Sea x su límite. Entonces,

$$f(x) = f\left(\sum_n x_n\right) = \sum_n f(x_n) = \sum_n y_n = y.$$

Por la definición de p, $p(y) \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ y por tanto

$$p\left(\sum_n y_n\right) \leq \|x\| = \left\|\sum_n x_n\right\| \leq \sum_n \|x_n\| \leq \sum_n \left(p(y_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \leq \sum_n p(y_n) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, hemos demostrado que $p\left(\sum_n y_n\right) \leq \sum_n p(y_n)$.

Demostremos la segunda parte del teorema. Sea $y \in f(U)$. Entonces $y = f(x)$ para algún $x \in U$ tal que $\|x\| < 1$

$$p(y) \leq \|x\| < 1.$$

Si $p(y) < 1$, entonces existe un $x \in f^{-1}(y)$ tal que $\|x\| < 1$ y por tanto $y \in f(U)$. Como p es continua por el lema 3.7, se concluye que el conjunto $\{y \in Y : p(y) < 1\}$ es abierto.

Teorema 3.9 *(de la función abierta de Schauder) Sean X y Y espacios de Banach. Si f $X \to Y$ es una función lineal, continua y epiyectiva, entonces f es una función abierta.*

Demostración. Sea $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Por el teorema 3.8,

$$f(U) = \{y \in Y : p(y) < 1\} \text{ es abierto,}$$

donde

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) = \text{ínf}\left\{\|x\| : x \in f^{-1}(y)\right\}.$$

Luego existe un $r > 0$ tal que $B_r = \{y \in Y : \|y\| < r\} \subseteq f(U)$. Sea A un conjunto abierto de X y demostremos que $f(A)$ es abierto. Sea $b \in f(A)$. Entonces existe un $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Como A es abierto existe un $\epsilon > 0$ tal que $a + \epsilon U \subseteq A$. Como f es lineal, entonces

$$f(A) \supseteq f(a + \epsilon U) = f(a) + \epsilon f(U) \supseteq b + \epsilon B_r,$$

lo que demuestra que $f(A)$ es abierto.

Los teoremas que siguen son corolarios del teorema de la función abierta de Banach.

Teorema 3.10 *Sean X y Y espacios de Banach. Si $f: X \to Y$ es una función lineal, continua y biyectiva. Entonces $g = f^{-1}: Y \to X$ es lineal y continua y por tanto f es un isomorfismo topológico. Además existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que*

$$\alpha \|f(x)\|_Y \leq \|x\|_X \leq \beta \|f(x)\|_Y$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Es claro que f es lineal y epiyectiva y $g^{-1} = f$. Si $A \subset X$ es abierto, entonces $B = f(A)$ es abierto y por tanto $g^{-1}(A) = f(A) = B$ es abierto, lo que demuestra f^{-1} es continua. La segunda parte es inmediata.

Teorema 3.11 *Sean X y Y espacios de Banach. Si $f: X \to Y$ es una función lineal, continua y epiyectiva y si $N = f^{-1}(0_Y)$ es el núcleo de f, entonces la función*

$$\widehat{f} : X/N \to Y, \quad \dot{x} \mapsto \widehat{f}(\dot{x}) = f(x)$$

es un isomorfismo topológico.

Demostración. Como N es un subespacio cerrado porque f es continua, entonces X/N con la norma cociente es un espacio de Banach y $\widehat{f}$ es continua y biyectiva y por el teorema 3.10 es un isomorfismo topológico.

Teorema 3.12 *Sean X y Y espacios de Banach. Si $f : X \to Y$ es una función lineal, continua y epiyectiva, entonces $f^{-1} : Y \to X$ (como función multivaluada) es semicontinua inferiormente y existe una constante $l > 0$ tal que implica*

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) \leq l \|y\| \ \textit{para todo } y \in Y. \tag{4}$$

Con mayor generalidad, si $b = f(a)$ entonces

$$d\left(a, f^{-1}(y)\right) \leq l \|y - b\| \ \textit{para todo } y \in Y. \tag{5}$$

Demostración. Demostremos que $g = f^{-1}$ es semicontinua inferiormente. Sean $b \in Y$ y W un abierto en X tal que $g(b) \cap W \neq \emptyset$. Debemos demostrar que existe una vecindad abierta V de b tal que $g(y) \cap W \neq \emptyset$ para todo $y \in V$. Por el teorema 3.9 de la función abierta, $f(W) = V$ es una vecindad abierta de b ya que $f(g(b)) = \{b\}$. Es claro que si $y \in V$ entonces $f(w) = y$ para algún $w \in W$ y por tanto $g(y) \cap W \neq \emptyset$.
Demostremos (4). Sea $y \in Y$. Recordemos que si $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, entonces $f(U) = \{y \in Y : p(y) < 1\}$. Sea $r > 0$ tal que $B_r \subseteq f(U)$. Como $z = \left(\frac{r}{2\|y\|}\right) y \in B_r$, entonces $p(z) < 1$ y por tanto $z = f(x)$ para algún $x \in U$, lo que implica que

$$p(z) = \left(\frac{r}{2\|y\|}\right) p(y) < 1 \ \text{ y } \ p(y) < l \|y\|$$

donde $l = \left(\frac{r}{2}\right)^{-1}$.
Ahora demostremos (5). Si $z \in f^{-1}(y)$, entonces $f(z - a) = y - b$ y por tanto

$$f^{-1}(y) - a \subseteq f^{-1}(y - b).$$

Si $z \in f^{-1}(y - b)$, entonces

$$f(z) = y - b \quad \text{y} \quad f(z + a) = y$$

luego $a + z \in f^{-1}(y)$ y $z \in f^{-1}(y) - a$. Por consiguiente,

$$f^{-1}(y - b) \subseteq f^{-1}(y) - a.$$

Por la inclusión al final de la demostración del teorema 3.9 se obtiene la igualdad deseada.

Finalmente demostraremos el teorema de la gráfica cerrada.

Si X y Y son espacios topológicos de Hausdorff y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $\gamma(f)$ (gráfica de f) es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. En efecto, si $(x, y) \notin \gamma(f)$, entonces $y \neq f(x)$ y por tanto existen vecindades abiertas V de y y W de $f(x)$ tales que $V \cap W = \emptyset$. Por la continuidad de f, existe una vecindad abierta U de x tal que $f(U) \subseteq W$ y por tanto $U \times W$ es una vecindad de (x, y) tal que $(U \times W) \cap \gamma(f) = \emptyset$. Es decir, $\gamma(f)$ es cerrado. El enunciado recíproco de este enunciado no es cierto en general. La gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es cerrada, pero la función indicada no es continua. De ahí la importancia del teorema siguiente.

Teorema 3.13 *(de la gráfica cerrada) Sean X y Y espacios de Banach y $f: X \to Y$ una función lineal. Entonces f es continua si y sólo si $\gamma(f)$ (gráfica de f) es cerrada.*

Demostración. Por lo dicho antes del enunciado del teorema, si f es continua entonces $G = \gamma(f)$ es cerrado. Supongamos que $\gamma(f) = G$ es cerrado. Por la linealidad de f, G es un subespacio de $X \times Y$ que es cerrado por hipótesis y por tanto es subespacio de Banach. La función $(x, f(x)) \mapsto x = u(x, f(x))$ de G en X es lineal. Es además continua porque la proyección

$$p_X : X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto p_X((x, y)) = x$$

es continua. Como u es biyectiva, entonces $u^{-1} : X \to G$ es lineal y continua por el teorema 3.10. La función $v : G \to Y$ definida por $v(x, f(x)) = f(x)$ es lineal y continua, pues es la restricción a G de la proyección

$$p_Y : X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto p_Y((x, y)) = y.$$

Por consiguiente, $f = v \circ u^{-1} : X \to Y$ es continua.

Observación 3.14 Si X es un espacio de Banach, Y es un espacio normado y $f : X \to Y$ es lineal, continua y epiyectiva, entonces f es abierta si y sólo si Y es completo. En efecto, por el teorema 3.11, no es posible que f sea abierta y Y no sea completo: el espacio de Banach X/N sería isomorfo a Y.
El ejemplo siguiente, bien conocido, aclara la situación. Sean $I = [a, b]$ y $\mathcal{C}(I)$ el espacio vectorial de las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$. En este espacio consideramos las normas siguientes:

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)| \text{ (norma del supremum) y } \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt \text{ (norma de la integral).}$$

Es bien sabido que $(\mathcal{C}(I), \|\|_\infty)$ es completo. Consideremos la función

$$j : (\mathcal{C}(I), \|\|_\infty) \to (\mathcal{C}(I), \|\|_1), \quad j(x) = x \text{ (la función idéntica).}$$

Esta función es un isomorfismo algebraico. Es además continua puesto que

$$\|j(x)\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt \leq \sup_{t \in I} |x(t)| (b - a) = (b - a) \|x\|_\infty .$$

Demostremos que j no transforma abiertos en abiertos. Argumentemos por contradicción y supongamos que j transforma abiertos en abiertos. Como $B = \{x \in \mathcal{C}(I) : \|x\|_\infty < 1\}$ es $\|\|_\infty$-abierto, entonces $j(B) = B$ es $\|\|_1$-abierto y por tanto existe un $r > 0$ tal que $T = \{x \in \mathcal{C}(I) : \|x\|_1 < r\} \subset B$. Sea $0 < \epsilon < r$ y consideremos la función

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a < t \leq b - \epsilon \\ 2\epsilon^{-1}(t - (b - \epsilon)) & \text{si } b - \epsilon < t \leq b \end{cases}$$

Entonces $\|x\|_\infty = 2$ y $\|x\|_1 = \epsilon < r$, lo que es una contradicción porque $j(B) \supset T$. A la luz del teorema de la función abierta de Banach, lo anterior indica que $(\mathcal{C}(I), \|\|_1)$ no es completo, es decir, no es un espacio de Banach. También se deduce de lo expuesto que

$$j^{-1} : (\mathcal{C}(I), \|\|_1) \to (\mathcal{C}(I), \|\|_\infty)$$

no es una función lineal continua.

4 Teorema de la función abierta para procesos convexos

Utilizaremos los mismos métodos de la sección anterior debidamente adaptados a la nueva situación. Utilizaremos:

i. El teorema 3.3 que expresa que todo subconjunto convexo, cerrado y absorbente de un espacio de Banach es una vecindad de cero.

ii. El lema de Bourbaki 3.4 debidamente adaptado para los procesos convexos.

Lema 4.1. *(de Bourbaki para procesos convexos) Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \rightarrow Y$ un proceso convexo y epiyectivo. Si V es una vecindad de 0_X, entonces $\overline{f(V)}$ es una vecindad de 0_Y.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\{x : \|x\| < \epsilon\} = W \subseteq V$. Por el teorema 3.3 es suficiente demostrar que $D = \overline{f(W)}$ es un conjunto convexo, cerrado y absorbente.

i) $f(W)$ es convexo. Sean $y, z \in f(W)$ y demostremos que

$$ty + (1-t)z \in f(W) \text{ con } 0 \leq t \leq 1.$$

Existen $a, b \in W$ tales que $y \in f(a)$ y $z \in f(b)$. Es decir (a, y) y $(b, z) \in \gamma(f)$. Como f es un proceso convexo, entonces su gráfica es un conjunto convexo y por tanto

$$t(a, y) + (1-t)(b, z) = (ta + (1-t)b, ty + (1-t)z) \in \gamma(f) \text{ si } 0 \leq t \leq 1.$$

Como W es convexo, entonces $ta + (1-t)b \in W$ y

$$ty + (1-t)z \in f(ta + (1-t)b) \subseteq f(W) \text{ si } 0 \leq t \leq 1.$$

ii) $\overline{f(W)} = D$ es conjunto convexo. La adherencia de un conjunto convexo es convexo.

iii) D es absorbente. Sea $y \in Y$. Entonces existe $x \in X$ tal que $y \in f(x)$ por ser f epiyectiva. Como W es absorbente, existe un $s > 0$ tal que $sx \in W$ y como f es un proceso, entonces $f(sx) = sf(x) \subseteq W$ y $sy \in f(W) \subseteq D$.

Lema 4.2 *Sean X y Y espacios de Banach. Si $f : X \to Y$ es un proceso convexo, epiyectivo y cerrado entonces la función $p : Y \to \mathbb{R}$ definida por*

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) = \text{ínf}\left\{\|x\| : x \in f^{-1}(y)\right\}$$

es sublineal, positiva, σ-subaditiva y continua. Además si

$$U = \{x \in X : \|x\| < 1\} \text{ entonces } f(U) = \{y \in Y : p(y) < 1\}$$

es un conjunto abierto y convexo.

Demostración. Como f es epiyectiva, para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $y \in f(x)$ y por tanto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$.

i) Es inmediato que $p \geq 0$.

ii) p es sublineal y $p(0) = 0$. Demostremos que p es positivamente homogénea. Sea $\lambda > 0$. Si $y \in Y$, sea $x \in X$ tal que $y \in f(x)$. Entonces $\lambda y \in \lambda f(x) = f(\lambda x)$ porque f es un proceso y por tanto

$$p(\lambda y) \leq \|\lambda x\| = \lambda \|x\| \text{ para todo } x \in f^{-1}(y),$$

lo que implica que $p(\lambda y) \leq \lambda p(y)$. Ahora por lo que acabamos de demostrar

$$p(y) = p\left(\lambda^{-1}(\lambda y)\right) \leq \lambda^{-1} p(\lambda y) \quad \text{y} \quad \lambda p(y) \leq p(\lambda y).$$

Hemos así demostrado que $\lambda p(y) = p(\lambda y)$. Demostremos que p es subaditiva. Sean $u, v \in Y$ y sea $\epsilon > 0$. Como f es epiyectiva, $f^{-1}(u)$ y $f^{-1}(v)$ no son vacíos. Sea $a \in f^{-1}(u)$ y $b \in f^{-1}(v)$
tales que

$$\|a\| < p(u) + \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \|b\| < p(v) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, por el teorema 2.5, $f(a + b) \supseteq f(a) + f(b)$ por ser f un proceso convexo. Como $u \in f(a)$ y $v \in f(b)$, entonces $u + v \in f(a + b)$ y por consiguiente,

$$p(u + v) \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| < p(u) + p(v) + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

lo que significa que $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$.

iii) Demostremos que p es σ-subaditiva. Para demostrar este enunciado, sea $\sum_n y_n$ una serie convergente en Y, digamos $y = \sum_n y_n$. Demostremos que

$$p\left(\sum_n y_n\right) \leq \sum_n p(y_n).$$

Si $\sum_n p(y_n) = \infty$, el enunciado es obvio. Supongamos que $\sum_n p(y_n) < \infty$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada y_n existe un x_n tal que $y_n \in f(x_n)$ y $\|x_n\| \leq p(y_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ y por tanto la serie $\sum_n \|x_n\|$ es convergente. Ello implica que la serie $\sum_n x_n$ es convergente. Sean $b_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ y $z_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Como f es un proceso convexo, entonces

$$f(b_n) \supseteq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \ni \sum_{k=1}^{n} y_k$$

y por tanto $(b_n, z_n) \in \gamma(f)$. Ahora, $\gamma(f)$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$ porque f es un proceso cerrado por hipótesis. Como $z_n \to y = \sum_n y_n$ y $b_n \to x = \sum_n x_n$, entonces $(x, y) \in \gamma(f)$ y por tanto

$$\begin{aligned} p\left(\sum_n y_n\right) &= p(y) \leq \|x\| = \left\|\sum_n x_n\right\| \\ &\leq \sum_n \|x_n\| \leq \sum_n \left(p(y_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_n p(y_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, hemos demostrado que

$$p\left(\sum_n y_n\right) \leq \sum_n p(y_n)$$

y por tanto hemos demostrado que p es sublineal, positiva y σ-subaditiva. Por el lema 3.7 de Zabreiko p es continua.

Demostremos la segunda parte del teorema. Sea $y \in f(U)$. Entonces $y \in f(x)$ para algún $x \in U$ tal que $\|x\| < 1$ y por consiguiente $p(y) \leq \|x\| < 1$. Si $p(y) < 1$ entonces existe un $x \in f^{-1}(y)$ tal que $\|x\| < 1$ y por tanto $y \in f(U)$. Como p es continua, se concluye que $\{y \in Y : p(y) < 1\}$ es abierto.

Definición 4.3 Un espacio topológico (X, τ) es un espacio de Tychonoff (T-espacio) (espacio completamente regular) si para todo punto $x \in X$ y todo subconjunto cerrado C de X que no contenga a x, existe una función continua $f: X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_C = 1$.

Un espacio métrico es espacio de Tychonoff. En particular, un espacio de Banach es un espacio de Tychonoff. Si X es completamente regular, C es cerrado y $y \notin C$, entonces existen vecindades abiertas U y V tales que $x \in U$, $C \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 4.4 *Sean X y Y espacios topológicos.*

(1) *Supongamos que Y es un T-espacio. Si $f : X \to Y$ es una función multivaluada, semicontinua superiormente y $f(x)$ es un subconjunto cerrado para todo x, entonces la gráfica $\gamma(f)$ es un subconjunto cerrado.*

(2) *Si $f : X \to Y$ es una función multivaluada cerrada, entonces $f(x)$ es cerrado para todo $x \in X$.*

Demostración. Demostremos (1). Supongamos que $(x, y) \notin \gamma(f)$. Entonces $y \notin f(x) = C$. Como Y es espacio de Tychonoff, existen vecindades U y V tales que $y \in U$ y $C \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como f es semicontinua superiormente, existe una vecindad abierta W de x tal que $f(z) \subseteq V$ para todo $z \in W$. Por consiguiente $W \times U$ es una vecindad de (x, y) tal que $(W \times U) \cap \gamma(f) = \emptyset$.
Demostremos (2). Sea $y \in \overline{f(x)}$. Entonces existe una red $(y_t)_{t \in T}$ en $f(x)$ que converge a y. Como $y_t \in f(x)$, entonces $(x, y_t) \in \gamma(f)$ y $(x, y_t) \to (x, y)$, así que $(x, y) \in \gamma(f)$ y por tanto este conjunto es cerrado.

Teorema 4.5 *(de la función abierta de Banach para procesos convexos) Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ un proceso convexo, epiyectivo y semicontinuo superiormente. Si $f(x)$ es cerrado para todo $x \in X$, entonces este proceso es abierto. Es decir, si A es un subconjunto abierto de X, entonces $f(A)$ es un conjunto abierto de Y. Además, la función inversa $f^{-1} = g : Y \to X$ es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Por el teorema 4.4, la gráfica $\gamma(f)$ es cerrada. Sea $p : Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) = \inf\left\{\|x\| : x \in f^{-1}(y)\right\}$$

la función del enunciado del lema 4.2. Es claro que si $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, entonces $f(U) = \{y \in Y : p(y) < 1\}$ por el lema 4.2 es abierto y por tanto existe un $r > 0$ tal que

$$B_r = \{y \in Y : \|y\| < r\} \subseteq f(U).$$

Sea A un subconjunto abierto de X y demostremos que $f(A)$ es abierto. Sea $b \in f(A)$. Entonces existe un $a \in A$ tal que $b \in f(a)$. Como A es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $a + \epsilon U \subseteq A$. Como f es un proceso convexo, entonces

$$f(A) \supseteq f(a + \epsilon U) \supseteq f(a) + \epsilon f(U) \supseteq b + \epsilon B_r.$$

Es decir, para todo $b \in f(A)$ existe una vecindad $V = b + \epsilon B_r$ contenida en $f(A)$. Esto demuestra que $f(A)$ es abierto.
Demostremos la última parte. Sean $b \in Y$ y W un subconjunto abierto tal que $f^{-1}(b) \cap W \neq \emptyset$. El conjunto $V = f(W)$ es abierto y $b \in V$. En efecto, si $a \in f^{-1}(b) \cap W$, entonces $b \in f(a) \subseteq V$. Si $y \in V$, entonces $y \in f(w)$ para algún $w \in W$ y $w \in f^{-1}(y) \cap W \neq \emptyset$.

El dominio efectivo de una función multivaluada $f : X \to Y$ es el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \neq \emptyset$. Denotaremos por Dom al dominio efectivo de f.

Lema 4.6 *Sean X y Y espacios de Banach. Si $f : X \to Y$ es un proceso convexo, cerrado y epiyectivo, entonces $g = f^{-1} : Y \to X$ es un proceso convexo, cerrado y epiyectivo.*

Demostración. En primer lugar, g es un proceso pues si $x \in g(\lambda y)$ entonces

$\lambda y \in f(x)$ y $y \in \lambda^{-1} f(x) = f(\lambda^{-1} x)$.

Luego $\lambda^{-1} x \in g(y)$ y $x \in \lambda g(y)$. Hemos demostrado que $g(\lambda y) \subseteq \lambda g(y)$.

Ahora, $g(y) = g(\lambda^{-1}(\lambda y) \subseteq \lambda^{-1} g(\lambda y)$ y por tanto $\lambda g(y) \subseteq g(\lambda y)$. La gráfica de g es

$$\gamma(g) = \{(y,x) : x \in g(y) \text{ con } y \in \mathrm{D}om(g)\}$$

y la gráfica de f es el conjunto

$$\gamma(f) = \{(x,y) : y \in f(x) \text{ con } x \in \mathrm{D}om(f)\}.$$

Ahora, la función $\psi : X \times Y \to Y \times X$ definida por $\psi(x,y) = (y,x)$ es un isomorfismo topológico y por tanto $\psi(\gamma(f)) = \gamma(g)$ es convexo y, además, cerrado si $\gamma(f)$ es cerrado.

El teorema 4.4 informa que en los espacios de Tychonoff las funciones multivaluadas semicontinuas superiormente son cerradas (tienen gráfica cerrada). El teorema 3.13 de la gráfica cerrada para las funciones monovaluadas expresa que las funciones lineales de gráfica cerrada son continuas. En suma, si X y Y son espacios de Banach y $f : X \to Y$, entonces f es continua si y sólo si es cerrada. Un teorema similar es válido para los procesos convexos. Antes de enunciarlo demostraremos el lema siguiente cuya demostración es similar a la demostración del lema 4.2.

Lema 4.7 *Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ un proceso convexo y cerrado tal que $f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Para cada $x \in X$ definimos*

$$p(x) = \text{ínf}\{\|y\| : y \in f(x)\}.$$

Entonces p es sublineal, σ-subaditiva y continua. Además, si $U = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$ y $T = \{x \in X : p(x) < 1\}$, entonces $f(x) \cap U \neq \emptyset$ para todo $x \in T$.

Demostración. Basta seguir paso a paso la demostración del lema 4.2. Demostraremos la última parte. Si $x \in T$, entonces $p(x) < 1$ y existe por tanto un $y \in Y$ tal que $\|y\| < 1$ y $y \in f(x)$. Es claro que $y \in f(x) \cap U$.

Teorema 4.8 *(de la gráfica cerrada para los procesos convexos) Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada tal que $f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ Si f es un proceso convexo y cerrado, entonces f es semicontinuo inferiormente.*

Demostración. Para cada $x \in X$ definimos

$$p(x) = \inf_{y \in f(x)} \|y\|, \; U = \{y \in Y : \|y\| < 1\} \text{ y } T = \{x \in X : p(x) < 1\}$$

como en el lema 4.2

Sean $W \subset Y$ un subconjunto abierto y $a \in X$ tal que $f(a) \cap W \neq \emptyset$. Sea $b \in f(a) \cap W$. Entonces $b + \epsilon U \subset W$ para algún $\epsilon > 0$. Sea $V = a + \epsilon T$. Como p es continua, entonces T es un conjunto abierto en X y por tanto V es una vecindad abierta de a. Si $x \in V$, entonces $x = a + \epsilon t$ para algún $t \in T$. Como f es convexo, entonces

$$f(x) \supseteq f(a) + \epsilon f(t) \ni b + \epsilon t \text{ para algún } y \in U \cap f(t).$$

Luego $b + \epsilon y \in b + \epsilon U \subseteq W$ y $b + \epsilon y \in f(x)$. Hemos demostrado así que $f(x) \cap W \neq \emptyset$ para todo $x \in V$.

5 Teorema de la función abierta para funciones multivaluadas convexas

Las funciones multivaluadas convexas necesitan de un tratamiento especial debido a la ausencia de homogeneidad. Hemos tratado de preservar el esquema anterior para los procesos convexos en los que la homogeneidad es crucial.

En la demostración del lema siguiente conviene observar que si T y S son subconjuntos convexos y absorbentes de un espacio de Banach X y ambos contienen a 0_X, entonces $S \cap T$ es convexo y absorbente.

Lema 5.1. *Sean X, Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada convexa, epiyectiva y supongamos que $0_Y \in f(0_X)$. Si $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ y $T = f(B)$, entonces 0_Y es un punto interior de $\overline{T}$.*

Demostración. Observemos que $T = f(B)$ es convexo porque f es una función convexa. Sea $L_n = nB$. Entonces

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) 0_X + \frac{1}{n} L_n = B$$

y como f es una función multivaluada convexa, entonces

$$f(B) \supseteq \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(0_X) + \frac{1}{n} f(L_n) \supseteq \left(1 - \frac{1}{n}\right) 0_Y + \frac{1}{n} f(L_n) = \frac{1}{n} f(L_n)$$

$$T = f(B) \supseteq \frac{1}{n} f(nB) \quad \Rightarrow \quad nT = nf(B) \supseteq f(nB) \text{ para todo } n.$$

Como $X = \bigcup_n nB$, entonces $Y = f(X) = \bigcup_n f(nB) \subseteq \bigcup_n nT$. Sea $E = \overline{T} \cap \left(-\overline{T}\right)$. Como T y $-T$ son convexos y absorbentes por ser f epiyectiva y convexa y, además, contienen a 0_Y, entonces $T \cap (-T)$ es convexo y absorbente por la observación afirmada al comienzo del enunciado. Luego E es convexo, cerrado y absorbente y $Y = \bigcup_n nE$. Por tanto $\overline{E}$ es convexo, cerrado y absorbente. Podemos aplicar el teorema de Baire y concluimos que $\operatorname{int}(nE) \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\operatorname{int}(E) \neq \emptyset$. Ahora,

$$U = \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(E) + \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(-E)$$

es un conjunto abierto puesto que $\mathrm{int}\,(E)$ y $\mathrm{int}\,(-E)$ son abiertos. Además

$$0_Y \in U = \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(E) + \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(-E) \subseteq \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}(-E)\,.$$

Por otro lado $E{=}{-}E$ porque $E{=}\overline{T}\cap\left(-\overline{T}\right)$ y $\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}E = E$ puesto que E es convexo, en consecuencia

$$0_Y \in U = \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(E) + \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(-E) \subseteq \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}(-E)$$

$$= \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}E = E = \overline{T}\cap\left(-\overline{T}\right) \subseteq \overline{T}$$

lo que demuestra que 0_Y es un punto interior de $\overline{T}$.

Lema 5.2 *Sea T un subconjunto convexo de un espacio de Banach X tal que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión en T y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}v_n$ converge, entonces su límite está en $2T$. Si 0_X es un punto interior de $\overline{T}$, entonces es un punto interior de T.*

Demostración. Sea $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Existe por hipótesis un $r > 0$ tal que $rB \subseteq \frac{1}{2}\overline{T}$. Demostraremos que $rB \subseteq T$. Sea $y \in rB$. Entonces $2y \in 2rB \subseteq \overline{T}$ y por tanto existe un $u_0 \in (2y + rB) \cap T$. Es decir,

$$u_0 \in T \quad \text{y} \quad \|2y - u_0\| < r.$$

Como $2y - u_0 \in rB \subseteq \frac{1}{2}\overline{T}$, existe u_1 tal que

$$u_1 \in \frac{1}{2}T \quad \text{y} \quad \|2y - u_0 - u_1\| < \frac{r}{2}.$$

Se procede inductivamente para construir una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tal que

$$u_n \in \frac{1}{2^n}T \quad \text{y} \quad \left\|2y - \sum_{k=0}^{n} u_k\right\| < \frac{r}{2^k}.$$

Sea $v_n = 2^n u_n$. Entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión en T tal que

$$\left\|2y - \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}v_k\right\| < \frac{r}{2^k}.$$

Por consiguiente $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2^{-n}v_n = 2y$ y por hipótesis $2y \in 2T$, así que $y \in T$. Hemos así demostrado que $rB \subseteq T$. Por tanto 0_X es un punto interior de T.

Teorema 5.3 *Sean X, Y espacios de Banach. Si $f : X \to Y$ es una función multivaluada convexa, cerrada y $0_Y \in f(0_X)$, entonces la función $p : Y \to \mathbb{R}$ definida por*

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) \tag{6}$$

es positiva, convexa y continua. Además, si

$$B = \{x \in X : \|x\| < 1\}, \text{ entonces } f(B) = T = \{y \in Y : p(y) < 1\}. \tag{7}$$

Demostración. La demostración de (7) es imediata a partir de la definición de p. Demostraremos la primera parte del teorema.

En primer lugar, $p(y) \geq 0$ para todo $y \in Y$ por la definición misma de p. Demostremos que p es convexa. Sean y_1, $y_2 \in T$ y $\epsilon > 0$. Existen b_1, $b_2 \in X$ tales que $y_1 \in f(b_1)$ y $y_2 \in f(b_2)$ y

$$p(y_1) + \frac{\epsilon}{2} \geq \|b_1\| \quad \text{y} \quad p(y_2) + \frac{\epsilon}{2} \geq \|b_2\|.$$

Por consiguiente, si $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\|tb_1 + (1-t)b_2\| \leq t\|b_1\| + (1-t)\|b_2\| \leq tp(y_1) + (1-t)p(y_2) + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Luego

$$\|tb_1 + (1-t)b_2\| \leq tp(y_1) + (1-t)p(y_2)$$

si $0 \leq t \leq 1$. Como f es convexa, por el teorema 2.2 concluimos que

$$tf(b_1) + (1-t)f(b_2) \subseteq f(tb_1 + (1-t)b_2)$$

y por consiguiente

$$ty_1 + (1-t)y_2 \in f(tb_1 + (1-t)b_2).$$

Podemos concluir ahora que

$$p(ty_1 + (1-t)y_2) \leq \|tb_1 + (1-t)b_2\| \leq tp(y_1) + (1-t)p(y_2).$$

Es decir, p es convexa.

Demostremos que p es continua. Para ello demostraremos que T satisface las condiciones del lema 5.2. Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión en T tal que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}^{n} 2^{-n}v_n$ es convergente y demostremos que es convergente y su límite está en

$2T$. Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} v_n$ y escribamos $t_n = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\right)^{-1}$. Es claro que $t_n \to \frac{1}{2}$. Si $z_n = t_n \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} v_k$, entonces $z_n \in T$ puesto que T es convexo. Observemos que $z_n \to \frac{1}{2} y$. Sea

$$x_n = t_n \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} u_k, \text{ donde } u_k \in B \text{ y } v_k \in f(u_k).$$

Este u_k existe porque $f(B) = T$ y porque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión en T. Entonces $z_n \in f(x_n)$. En efecto, por ser f convexa,

$$f(x_n) \supseteq \sum_{k=0}^{n} \left(t_n 2^{-k}\right) f(u_k) \ni \sum_{k=0}^{n} \left(t_n 2^{-k}\right) v_k = z_n. \tag{8}$$

En resumen, si $x_n = t_n \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} u_k$, entonces $z_n \in f(x_n)$ y $\|x_n\| < 1$. Además la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge a un x tal que $\|x\| \leq 1$.

Como $(x_n, z_n) \in \gamma(f)$ por lo demostrado en (8) y $\gamma(f)$ es cerrado por hipótesis, entonces

$$\lim_n (x_n, z_n) = \left(x, \frac{1}{2} y\right) \in \gamma(f)$$

y por tanto $\frac{1}{2} y \in f(x) \subseteq T$, así que $y \in 2T$. Por el lema 5.2 concluimos que 0_Y es un punto interior de T y esto permite concluir que p es continua en 0_Y como lo demostraremos en seguida. Observemos que existe una vecindad $V = \{y \in Y : \|y\| < r\} \subseteq T$ y por tanto $p(y) < 1$ si $y \in V$. Sea $0 < \epsilon < 1$. Si $\delta = \epsilon r$, entonces $\|y\| < \delta$ implica $p(y) < \epsilon$ y esto demuestra que p es continua en cero porque $p \geq 0$. En efecto, si $\|x\| < \epsilon r$ y $b = \frac{x}{\epsilon}$, entonces $x = \epsilon b$ y $\|b\| < r$. Como p es convexa y $p(0_Y) = 0$, entonces

$$p(x) = p(\epsilon b) \leq \epsilon p(b) < \epsilon.$$

Finalmente, p es continua por lo demostrado en la parte final del lema 3.7 de Zabreiko.

Lema 5.4 *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces:*

1. *La función $\varphi : X \times Y \to X \times Y$ definida por $\varphi_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$, donde $a \in X$ y $b \in Y$ transforma conjuntos convexos en conjuntos convexos y conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.*

2. *La función* $\psi : X \times Y \to X \times Y$ *definida por* $\psi(x, y) = (y, x)$ *transforma conjuntos convexos en conjuntos convexos y conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.*

3. *Si* $f : X \to Y$ *es una función multivaluada y* $g : X \to Y$ *es una función multivaluada definida por* $g(x) = f(a + x) - b$ *donde* $a \in X$ *y* $b \in Y$*, entonces* $\gamma(f) = \varphi_{a,b}(\gamma(g))$.

Teorema 5.5 *(de la función abierta de Banach para funciones multivaluadas convexas y cerradas) Sean* X *y* Y *espacios de Banach y* $f : X \to Y$ *una función multivaluada convexa, cerrada y epiyectiva. Entonces* f *es una función abierta.*

Demostración. Sean A un subconjunto abierto de X y $B = f(A)$. Si $b \in B$, sea $a \in A$ tal que $b \in f(a)$. Ahora definimos la función multivaluada $g : X \to Y$ por la fórmula

$$g(x) = f(a + x) - b.$$

Esta función es convexa, epiyectiva y cerrada por el lema anterior y $0_Y \in g(0_X)$. Por el teorema 5.3, la función

$$p_g(y) = d\left(0_X, g^{-1}(y)\right)$$

es convexa, positiva y continua. Sean

$$U = \{x \in X : \|x\| < 1\} \quad \text{y} \quad T = g(U) = \{y \in Y : p_g(y) < 1\}.$$

Como A es abierto, existe un r tal que $0 < r < 1$ y $a + rU \subseteq A$ (de aquí tenemos que $0 < 1 - r$ y $0 < r$). Como g es convexa,

$$g(rU) = g((1 - r)0_X + rU) \supseteq (1 - r)g(0_X) + rg(U).$$

Como $0_Y \in g(0_X)$ entonces

$$g(rU) \supseteq (1 - r)0_Y + rg(U) = rg(U)$$

y por tanto

$$g(rU) = g((1 - r)0_X + rU) \supseteq rg(U) = rT.$$

Luego

$$rT \subseteq g(rU) = f(a + rU) - b \subseteq T \quad \text{y}$$

$$B = f(A) \supseteq f(a + rU) \supseteq b + rT.$$

Como T es abierto (puesto que p es una función continua), entonces rT es abierto y $b + rT$ es una vecindad de b contenida en B. Hemos así demostrado que B es un conjunto abierto.

Teorema 5.6 *(de la función abierta de Banach para funciones multivaluadas convexas y semicontinuas superiormente) Sean* X *y* Y *espacios de Banach y*

$f : X \to Y$ una función multivaluada convexa, semicontinua superiormente y epiyectiva. Si $f(x)$ es cerrado para cada $x \in X$, entonces f es una función cerrada y abierta.

Demostración. En el teorema 4.4 se demostró que si (X, τ) y (Y, σ) son espacios topológicos hausdorffianos, Y es un espacio de Tychonoff, $f : X \to Y$ es una función multivaluada semicontinua superiormente y $f(x)$ es cerrado para todo $x \in X$, entonces $\gamma(f)$ es un conjunto cerrado de $X \times Y$. Las hipótesis de este teorema se satisfacen en el enunciado del teorema que estamos demostrando: X y Y son espacios hausdorffianos por ser espacios métricos, ambos son espacios de Tychonoff, f es semicontinua superiormente y $f(x)$ es cerrado para cada $x \in X$. Por consiguiente f es una función cerrada y abierta en virtud del teorema 4.4, así que por el teorema 5.5 esta función transforma abiertos en abiertos.

Teorema 5.7 *Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función multivaluada. Entonces los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *f es una función convexa, epiyectiva y cerrada.*
2. *$g = f^{-1}$ es una función convexa, epiyectiva y cerrada.*
3. *f es una función convexa, semicontinua superiormente y $f(x)$ es cerrado para todo $x \in X$.*

Demostración. Es claro que (1) $\Leftrightarrow$ (2) por el lema 5.4 (item 2.) ya que $\gamma(g) = \psi(\gamma(f))$. Hemos demostrado en el teorema 4.4 que (3) $\Rightarrow$ (1). Resta demostrar que (1) $\Rightarrow$ (3). Sean $a \in X$ y W una vecindad abierta de $f(a)$. Como g es convexa, epiyectiva y cerrada, entonces transforma abiertos en abiertos, por el teorema 5.5, y por tanto $V = g(W)$ es un conjunto abierto que contiene al punto a. Si $x \in V$, entonces $f(x) \subseteq W$ puesto que $f(V) = f \circ g(W) = W$. Hemos así demostrado que f es semicontinua superiormente. Como $\gamma(f)$ es cerrado por hipótesis, entonces $f(x)$ es cerrado para todo $x \in X$ por el teorema 4.4.2.

6 Condiciones de Lipschitz para las inversas de las funciones multivaluadas convexas

Definición 6.1 Sean Xy Yespacios de Banach y $l > 0$. Una función multivaluada h: $X \to Y$es l-**lipschitziana** si

$$h(a) \subseteq h(b) + l\,\|a - b\|\, B_Y \quad \text{para todo } (a, b) \in X \times X$$

donde $B_Y = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$.

Lema 6.2. *Sean X y Y espacios de Banach y $l > 0$. Una función multivaluada $h : X \to Y$ es l-lipschitziana si y sólo si para todo $u \in h(a)$ existe un $v \in h(b)$ tal que $\|u - v\| \leq l\,\|a - b\|$.*

Demostración. Si $u \in h(a)$, entonces existe un $v \in h(b)$ tal que $u - v \in l\|a-b\| B_Y$ y por tanto $\|u-v\| \leq l\|a-b\|$. El enunciado recíproco es igualmente inmediato.

Teorema 6.3 *(Ver [1], Teorema 2.2.1) Sean* X *y* Y *espacios de Banach y* $f : X \to Y$ *un proceso convexo, epiyectivo y cerrado. Entonces* $g = f^{-1} : Y \to X$ *es una función multivaluada lipschitziana. Es decir, si* $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ *y* $x_1 \in f^{-1}(y_1)$*, entonces existe* $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ *tal que* $\|x_1 - x_2\| \leq l\|y_1 - y_2\|$.

Demostración. Consideremos la función $p : Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(y) = d\left(0_X, f^{-1}(y)\right) = \text{ínf}\left\{\|x\| : x \in f^{-1}(y)\right\}.$$

Por el teorema 3.7 esta función es sublineal, positiva y σ-subaditiva y por tanto continua.

Además, si

$$U = \{x \in X : \|x\| < 1\} \text{ entonces } f(U) = \{y \in Y : p(y) < 1\}$$

es un conjunto abierto y convexo. Como $f(U)$ es abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$B_r = \{y \in Y : \|y\| < r\} \subseteq f(U).$$

Si $y \in Y$ y $y \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{r}{2\|y\|}\right) y = z \in B_r$ y por tanto $p(z) = \dfrac{rp(y)}{2\|y\|} < 1$. Hemos así demostrado que si $l = 2r^{-1}$, entonces

$$p(y) < l\|y\| \text{ para todo } y \in Y \text{ diferente de cero.}$$

Sea $x_1 \in f^{-1}(y_1)$. Por lo que acabamos de demostrar, $p(y_2 - y_1) < l\|y_2 - y_1\|$ si $y_2 \neq y_1$ y por tanto existe un x' tal que

$$x' \in f^{-1}(y_2 - y_1) \text{ y } \|x'\| \leq l\|y_2 - y_1\|.$$

Sea $x_2 = x' + x_1$. Entonces $f(x_2) \supseteq f(x') + f(x_1)$ por ser f un proceso convexo y por tanto

$$(y_2 - y_1) + y_1 = y_2 \in f(x_2) \text{ y } \|x'\| = \|x_2 - x_1\| \leq l\|y_2 - y_1\|.$$

Un teorema similar es válido para las funciones multivaluadas convexas. La diferencia es que las funciones inversas van a ser localmente lipschitzianas.

Definición 6.4 Sean X y Y espacios de Banach y $l > 0$. Una función multivaluada $h : X \to Y$ es lipschitziana localmente en $x_0 \in X$ si existe una vecindad abierta V de x_0 y una constante $l > 0$ tales que

$$h(a) \subseteq h(b) + l\|a-b\| B_Y \quad \text{para todo} \ (a,b) \in V \times V$$

donde $B_Y = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$. La vecindad V y la constante $l > 0$ dependen de x_0. Es localmente lipschitziana si es localmente lipschitziana en todo punto.

Teorema 6.5. *(Robinson- Urescu) (Ver [1], Teorema 2.2.2) Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función convexa, cerrada y epiyectiva. Entonces $f^{-1} : Y \to X$ es localmente lipschitziana. Es decir, dados $y_0 \in f(x_0)$, existen una vecindad abierta V de y_0 y un $l > 0$ tales que para todo $y \in V$ existe una solución $y \in f(x)$ que satisface $\|x - x_0\| < l\|y - y_0\|$.*

Demostración. Sean $y_0 \in Y$ y $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Consideremos la función

$$g : X \to Y, \ \text{definida por} \ g(x) = f(x + x_0) - y_0.$$

Es claro que $0_Y \in g(0_X)$. La función g depende de (x_0, y_0). La función $p : Y \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(y) = d\left(0_X, g^{-1}(y)\right) = \text{ínf}\left\{\|x\| : x \in g^{-1}(y)\right\}$$

es convexa, cerrada, epiyectiva por el lema 5.7. Además, es continua por el teorema 5.3 y si $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, entonces $g(U) = T = \{y \in Y : p(y) < 1\}$. Sea $0 < r < 1$ tal que $rB \subseteq T$. Como g es convexa entonces $g(rU) \supseteq rB$. Sean $y \in y_0 + rB = V$ y $s = \|y - y_0\|$. Si

$$z = (y - y_0) + \frac{r}{2s}(y - y_0) \ \text{entonces} \ y - y_0 = \frac{2s}{2s + r} z$$

y por consiguiente,

$$\|z\| \leq \|z - (y - y_0)\| + \|y - y_0\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \ \text{y} \ z \in T.$$

Concluimos entonces que

$$p(y - y_0) \leq \frac{2s}{2s + r} p(z) < \frac{2s}{r} = l\|y - y_0\| \ \text{donde} \ l = \frac{2}{r}.$$

Por la definición de p existe un $x' \in U$ tal que $\|x'\| \leq p(y - y_0) < l\|y - y_0\|$. Además $y - y_0 \in g(x') = f(x' + x_0) - y_0$ y por tanto $y \in f(x)$, donde $x = x' + x_0$. Es claro ahora que hemos demostrado que para todo $y \in V = y_0 + rB$, existe una solución de $y \in f(x)$ tal que $\|x - x_0\| < l\|y - y_0\|$, donde $l = \frac{2}{r}$ depende de (x_0, y_0).

Referencias bibliográficas

[1] Aubin J.P and Frankowska H. (1990). *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser.

[2] Banach S. (1932). *Theorie des operations lineaires*, Warszawa.

[3] Bourbaki N. N. (2007). *Espaces vectoriels topologiques*, Springer.

[4] Debreu G. (1959). *Theory of Value An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press.

[5] Megginson R. E. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer.

[6] Narvaez D. y Restrepo G. (2011). *Funciones multivaluada*s, Revista de Ciencias de la Universidad del Valle, Vol. 15, 63-81.

[7] Robinson S. M. (1975). *Regularity and Stability for Convex Multivalued Functions*, Math. Oper. J, 25.

[8] Schauder J. (1930). *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math., 2.

[9] Urescu C. (1975). *Multifunctions with Closed Convex Graphs*, Czech Math. J, 25.

[10] Zabreiko, P. P. (1969). *A Theorem on Semiadditive Funtionals*, Functional Anal. Appl., 3 (English translation from Russian).

Dirección de los autores

Diana Ximena Narvaez
Departamento de Matematicas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
dianaximena85@yahoo.com

Guillermo Restrepo
Departamento de Matematicas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
guillermo.restrepo@correounivalle.edu.co