

Identification of the primitive type of the Voronoi cell in 4-dimensional euclidean lattice

Juan Miguel Velásquez Soto

Universidad del Valle

Received: February 6, 2014

Accepted: August 12, 2014

Pag. 43-55

Abstract

We will show a mathematical algorithm in order to determine the Voronoi Type of a Euclidean lattice in dimension 4. It is an implementation of Charve's reduction theory of positive definite quadratic forms (see [3]). This algorithm helps us to recognize lattice Types in order to try to solve the general problem of finding the optimal lattice quantizer in dimension 4.

Keywords: Voronoi cell, quadratic forms.

Identificación del tipo primitivo de la celda de Voronoi en retículos euclidianos 4 dimensionales

Resumen

Basados en el trabajo de León Charve [3], sobre reducción de formas cuadráticas cuaternarias definidas positivas, se implementa un algoritmo con el cual es posible determinar el *Tipo primitivo* de la celda de Voronoi que corresponde a un retículo 4 dimensional. Este resultado es esencial a la hora de calcular la constante de cuantización de un retículo arbitrario, lo que permite avances significativos al momento de abordar el problema del retículo cuantizador óptimo en dimensión 4.

Palabras clave: Celdas de Voronoi, formas cuadráticas.

1 Introducción

Un *retículo euclidiano* es un subconjunto L de \mathbb{R}^n formado por todas las combinaciones lineales enteras de n vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^n . En símbolos esto es: $L = \{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i : m_i \in \mathbb{Z}\}$ donde $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ constituyen una base de \mathbb{R}^n .

Son retículos euclideos: \mathbb{Z}^n , al que se le suele llamar *retículo cúbico*. El *checkerboard lattice*, o *tablero de damas* $D_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : x_1 + \dots + x_n \text{ es par}\}$, también es un retículo n -dimensional $A_n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}$, que por economía en la escritura conviene presentarlo como subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} . $H_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \alpha(1, 0) + \beta(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}$, al que comúnmente se le llama *retículo hexagonal*, entre otros.

Alrededor de cada punto \mathbf{u}_0 de un retículo L se encuentra su *celda de Voronoi* $S(\mathbf{u}_0)$, la cual se define como el conjunto de puntos del espacio euclídeo \mathbb{R}^n cuya

distancia a \mathbf{u}_0 es menor o igual que la distancia a cualquier otro punto de L . Si $N(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}$, la norma al cuadrado de \mathbf{z} , la celda $S(\mathbf{u}_0)$ se describe como

$$S(\mathbf{u}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : N(\mathbf{x} - \mathbf{u}_0) \leq N(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v} \in L\}. \quad (1)$$

Es claro que en los retículos estas celdas son todas iguales, y producen un *embaldosamiento* (o *tiling*) del espacio \mathbb{R}^n . Una celda de Voronoi es *primitiva* si el embaldosamiento generado es tal que en cada vértice de una de las celdas concurren exactamente $n + 1$ de ellas, que es el mínimo número posible de celdas concurrentes. Adicionalmente, diremos que un retículo es *primitivo* si su celda de Voronoi asociada es primitiva.

En dimensión 2 hay esencialmente dos tipos de celdas de Voronoi: una de forma hexagonal, la primitiva, y otra rectangular. La primera ocurre en el caso genérico, retículo tomado al azar. La Figura 1 muestra la forma de las celdas en dimensión 2.

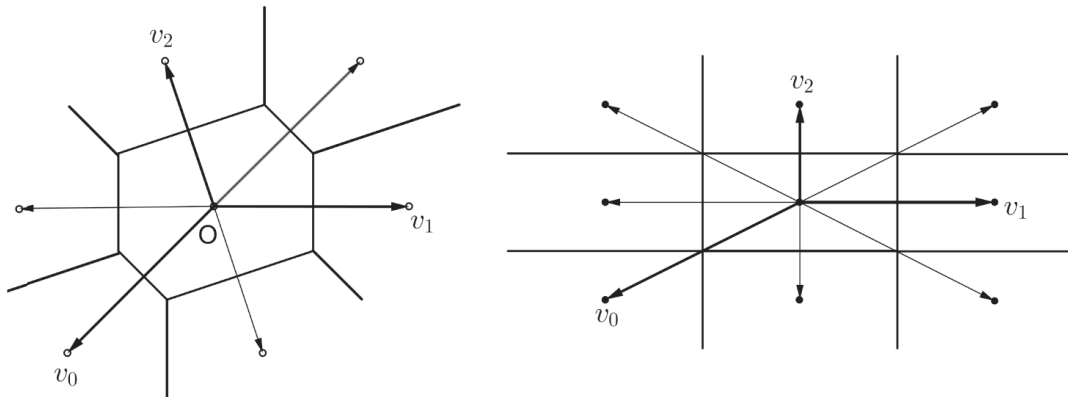


Figura 1. Celdas de Voronoi en dimensión 2.

En dimensión 3 también hay una celda primitiva de la cual se desprenden 5 celdas de Voronoi distintas, salvo equivalencias combinatorias [12]. La Figura 2 muestra la forma de todas las celdas en dimensión 3, En [6], Conway - Sloane hacen una hermosa descripción de estas celdas por medio de lo que ellos llaman *Vonormas* y *conormas*.

En dimensión 4 hay 3 tipos de celdas primitivas y 52 formas distintas de celdas, mientras que en dimensión 5 hay 222 tipos primitivos y 179372 formas distintas de celdas de Voronoi.

La celda de Voronoi es un elemento geométrico que cumple un rol fundamental en la mayoría de los problemas importantes relacionados con retículos, entre los que se destacan: *The packing problem*, donde se trata de empaquetar esferas del mismo tamaño de la manera más eficiente posible, es decir, disponiéndolas unas

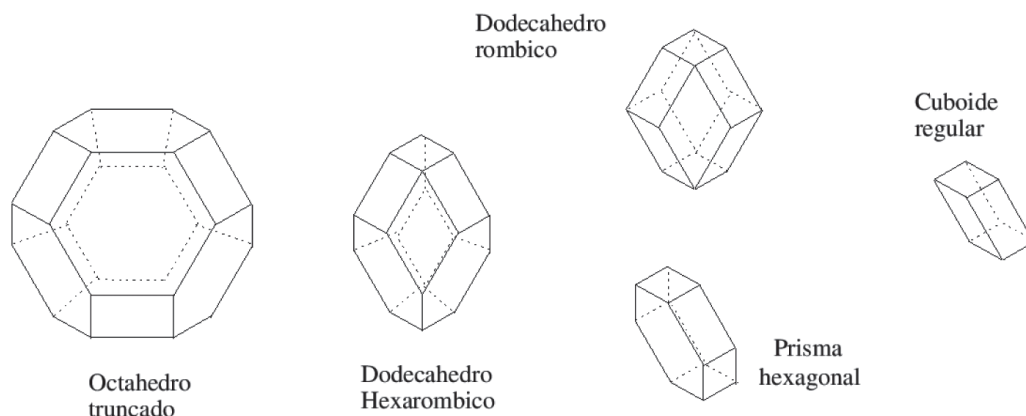


Figura 2. Celdas de Voronoi para retículos en dimensión 3.

sobre otras de la forma más densa posible; *The covering problem*, en el que se busca cubrir el espacio con esferas del mismo tamaño, estas esferas se superponen de la manera más “económica” posible; *The kissing number* o número de contacto, en el que se quiere disponer el mayor número de esferas del mismo tamaño de manera que todas ellas besen — sean tangentes— a una esfera prefijada; por último *The lattice quantizer problem*, donde tras un proceso de discretización, se quiere encontrar la forma de la celda que minimiza el error cometido en el proceso de discretización, este problema solo ha sido resuelto en dimensiones 2 y 3. Para ampliar la información sobre estos y otros problemas relacionados, [5, Chap 1].

En términos generales, podemos decir que se ha avanzado poco en la solución de estos problemas [5, Chap 1]. Una de las razones es que las cuentas involucradas en ellos son muy grandes y dispendiosas aun en dimensiones bajas. Además que usan los parámetros de Selling, las vonormas o las conormas, los cuales aumentan en número muy rápidamente con relación a la dimensión del retículo. El lector puede encontrar información sobre el estado actual de estos problemas en [2].

La clasificación de las celdas de Voronoi en dimensiones bajas ha sido revisitada por varios autores en diferentes momentos de la historia, se destacan los enfoques dados por Delone [9], Conway & Sloane, con las Conormas y Vonormas [4, 6], el de Ryškov & Baranovski en [14] con las llamadas L-formas, y más recientemente el de Valentin [17], por medio de formas cuadráticas semidefinidas positivas. Todas las clasificaciones usan de una u otra manera la correspondencia entre *retículos* y *formas cuadráticas definidas positivas* (FCDP). Para retículos 4-dimensionales se puede usar un método de reducción de formas cuadráticas dado por Charve [3] para obtener información de la celda.

Tras una lectura minuciosa del trabajo de Charve, conseguimos implementar su método de reducción de formas cuadráticas cuaternarias definidas positivas, y

lo usamos para obtener el tipo primitivo que le corresponde a la celda de Voronoi del retículo asociado, información que es vital a la hora de calcular la constante de cuantización del retículo. En una investigación en curso, el autor de este artículo ha determinado que la reducción propuesta por Charve brinda información clave a la hora de calcular la constante de cuantización de un retículo 4-dimensional, problema que en la actualidad no ha sido resuelto.

2 Preliminares y conceptos básicos

Sean $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21}, \dots, \mathbf{v}_{n1})^{tr}, \dots, \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_{1n}, \mathbf{v}_{2n}, \dots, \mathbf{v}_{nn})^{tr}$, donde tr denota el transpuesto, una base de un retículo n -dimensional L . Una *matriz generadora* M tiene por columnas los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Es claro que $\mathbf{t} \in L$ si y solo si para algún $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ se tiene que $\mathbf{t} = M\mathbf{x}$. Adicionalmente, $A = M^{tr}M$ se conoce como *matriz de Gram*, y es tal que la norma cuadrado del punto $\mathbf{t} = M\mathbf{x}$, $\|\mathbf{t}\|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}$, se puede escribir como $N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{tr}A\mathbf{x}$, la cual pensada en función de \mathbf{x} , resulta ser una forma cuadrática definida positiva asociada a L .

Un punto típico $\mathbf{t} \in L$ puede describirse al menos de tres maneras distintas: En términos de sus *\mathbf{t} -coordenadas euclídeas*, es decir, se lo puede ver como un punto $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^{tr}$ de \mathbb{R}^n , o por medio de sus coordenadas enteras, que llamaremos *\mathbf{x} -coordenadas* asociadas a una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr} \in \mathbb{Z}^n$ es tal que $\mathbf{t} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$, equivalentemente $\mathbf{t} = M\mathbf{x}$, o por medio de las *\mathbf{y} -coordenadas* de \mathbf{t} , definidas como $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Hacemos notar que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{x}^{tr}A\mathbf{x} = N(\mathbf{x})$, lo cual corresponde al cuadrado de la distancia entre el punto \mathbf{t} y el origen, además $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{y}^{tr}A^{-1}\mathbf{y}$.

Decimos que dos retículos son equivalentes, si uno de ellos puede obtenerse del otro por medio de una rotación, y/o un cambio de escala. En formas cuadráticas, decimos que dos formas $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{tr}A\mathbf{x}$, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{tr}B\mathbf{x}$ son equivalentes si existe una matriz entera U con determinante ± 1 tal que $B = U^{tr}AU$.

Hay una biyección natural entre las clases de retículos isométricos y las clases de formas cuadráticas definidas positivas aritméticamente equivalentes [16, 17]. En virtud de esta biyección, muchos aspectos de los retículos se pueden tratar desde el punto de vista de las formas cuadráticas y viceversa, con lo cual problemas de tipo geométrico asociados a los retículos se pueden tratar desde un punto de vista algebraico.

Si ϕ es una forma cuadrática cuaternaria definida positiva (FCCDP), se pueden encontrar escalares fijos, p_{ij} con $0 \leq i < j \leq 4$, a los que se les llama *Parámetros de Selling*, tales que si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)^{tr}$ con $x_0 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i < j \leq 4} p_{ij}(x_i - x_j)^2. \quad (2)$$

Adicionalmente, denotemos por $p_{i|jklm}$ a la suma $p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + p_{im}$, y sea

$$A' = \begin{pmatrix} p_{0|1234} & -p_{01} & -p_{02} & -p_{03} & -p_{04} \\ -p_{01} & p_{1|0234} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ -p_{02} & -p_{12} & p_{2|0134} & -p_{23} & -p_{24} \\ -p_{03} & -p_{13} & -p_{23} & p_{3|0124} & -p_{34} \\ -p_{04} & -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & p_{4|0123} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

unas pocas cuentas muestran que $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{tr} A' \mathbf{x}$.

Definición 2.1. Decimos que ϕ , escrita en la forma dada por (2), está reducida si satisface una de las siguientes tres condiciones:

- i. Todos los coeficientes p_{ij} en (2) son no negativos.
- ii. Hay un único coeficiente negativo en (2), digamos p_{st} , todos los demás son no negativos y se cumple que $|p_{st}| \leq p_{ij}$, para $\{s, t\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$.
- iii. Exactamente dos coeficientes en (2) que no comparten subíndices son negativos, digamos p_{st} y p_{uv} , los demás son no negativos y satisfacen: $|p_{st}| \leq p_{ij}$ para $\{s, t\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$, $|p_{uv}| \leq p_{ij}$ para $\{u, v\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ y $|p_{st} + p_{uv}| \leq p_{ij}$ con $i \in \{s, t\}$ y $j \in \{u, v\}$.

El siguiente teorema, establece que toda forma cuadrática cuaternaria definida positiva tiene una y solo una forma cuadrática aritméticamente equivalente que es reducida en el sentido de la definición anterior. La prueba del teorema es constructiva y se corresponde esencialmente con el algoritmo de reducción que presentamos en la Sección 3. El lector puede consultar dicha prueba en [3].

Teorema 2.2 (Charve). Toda forma cuadrática cuaternaria definida positiva, (FCCDP), tiene una y solo una forma cuadrática cuaternaria reducida que le es aritméticamente equivalente.

De otro lado, si L es un retículo 4-dimensional con matriz de Gram A , sabemos que $N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{tr} A \mathbf{x}$ es una FCCDP, en virtud de la Definición 2.1, diremos que L es de *Tipo I*, *Tipo II*, o *Tipo III*, si su forma cuadrática asociada $N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{tr} A \mathbf{x}$, es aritméticamente equivalente a una forma cuadrática reducida que cumple respectivamente la condición i, ii ó iii de la Definición 2.1.

Observación 2.3. Se puede probar que un retículo 4-dimensional es primitivo si y solo si su forma cuadrática reducida asociada, escrita en la forma (2), no tiene parámetros p_{ij} nulos.

3 Algoritmo de reducción

Consideremos como antes $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)^{tr}$ con $x_0 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, y para $0 \leq i < j \leq 4$ sean p_{ij} números reales tales que

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i, j \leq 4} p_{ij} (x_i - x_j)^2, \quad (4)$$

es una forma cuadrática cuaternaria definida positiva, y sea $M_\Phi = \sum_{0 \leq i, j \leq 4} p_{ij}$. Si Φ no está reducida de acuerdo con la Definición 2.1, necesariamente ocurre uno de los siguientes casos:

Caso 1. En (4), hay dos parámetros, p_{ij} y p_{it} , que comparten un subíndice, tales que $p_{ij} < 0$ y $|p_{ij}| > p_{it}$ con $t \neq j$. No hay pérdida de generalidad al asumir que $p_{12} < 0$ y $|p_{12}| > p_{13}$ en tal caso, al aplicarle a $\Phi(\mathbf{x})$ la transformación T1 dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_4 - x_3 \\ x_2 &\rightarrow x_1 - x_0 \\ x_3 &\rightarrow x_2 - x_0 \\ x_4 &\rightarrow x_4 - x_0 \\ x_0 &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{T1}$$

obtenemos la forma cuadrática $\phi(\mathbf{x}) = (p_{02} + p_{12})(x_0 - x_1)^2 + (p_{03} + p_{13})(x_0 - x_2)^2 + (p_{12} + p_{13} + p_{14})(x_0 - x_3)^2 + (p_{04} - p_{12} - p_{13})(x_0 - x_4)^2 + p_{23}(x_1 - x_2)^2 - p_{12}(x_1 - x_3)^2 + (p_{12} + p_{24})(x_1 - x_4)^2 - p_{13}(x_2 - x_3)^2 + (p_{13} + p_{34})(x_2 - x_4)^2 + (p_{01} + p_{12} + p_{13})(x_3 - x_4)^2$, la cual es aritméticamente equivalente a Φ , y tiene como suma de parámetros $M = (p_{12} + p_{13}) + M_\Phi$.

Caso 2. En (4) hay dos parámetros negativos, digamos p_{ij} y p_{kl} , que no comparten subíndices, tales que $|p_{ij} + p_{kl}| > p_{ik}$. No hay pérdida de generalidad al suponer que tales parámetros son p_{12} , p_{34} y p_{13} , es decir:

$$p_{12} < 0, p_{34} < 0, \text{ y } |p_{12} + p_{34}| > p_{13}$$

en este caso, la transformación T2 dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 - x_1 \\ x_2 &\rightarrow x_0 - x_4 \\ x_3 &\rightarrow x_0 - x_3 \\ x_4 &\rightarrow x_2 - x_4 \\ x_0 &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{T2}$$

envía a Φ en la forma cuadrática $\phi(\mathbf{x}) = -(p_{12} + p_{13})(x_0 - x_1)^2 + (p_{12} + p_{13} + p_{24} + p_{34})(x_0 - x_2)^2 + (p_{03} + p_{13} + p_{34})(x_0 - x_3)^2 + (p_{02} + p_{12} - p_{34})(x_0 - x_4)^2 + (p_{01} + p_{12} + p_{13})(x_1 - x_2)^2 + p_{13}(x_1 - x_3)^2 + (p_{12} + p_{14})(x_1 - x_4)^2 - (p_{13} + p_{34})(x_2 - x_3)^2 + (p_{04} - p_{12} + p_{34})(x_2 - x_4)^2 + (p_{01} + p_{12} + p_{13})(x_3 - x_4)^2$, que es aritméticamente equivalente a Φ , y cuya suma de parámetros es $M = (p_{12} + p_{13} + p_{34}) + M_\Phi$.

Hacemos notar que en cualquier caso, si una FCCDP no satisface alguna de las condiciones de reducción de la Definición 2.1, siempre es posible encontrar otra forma cuadrática aritméticamente equivalente a ella, cuya suma de parámetros sea menor, de tal manera que al aplicar este proceso repetidamente, necesariamente se obtendrá una forma cuadrática reducida que le es equivalente.

El proceso termina ya que la suma de los p_{ij} es acotada inferiormente por una constante que depende solo de los vectores de longitud mínima del retículo,

y dado que estos son únicos, el proceso no se puede extender indefinidamente. Más específicamente, el algoritmo comienza con un $M_0 = \sum p_{ij}$, que podemos pensar asociado a una *superbase* del retículo correspondiente a la FCCDP, esto es: Una base aumentada en un vector para que la suma de los mismos sea cero, y el algoritmo va reduciendo estrictamente el valor de M_0 .

En cada paso se cambia de forma cuadrática, lo que geoméricamente equivale a cambiar la superbase por una cuya suma M es menor a la anterior, pero solo hay un número finito de estas superbases, así que los posibles estados (formas cuadráticas) por los que el algoritmo puede pasar es finito, y en consecuencia el proceso de reducción no se puede extender indefinidamente.

Los pasos para aplicar el proceso de reducción son los siguientes:

Paso 1. Permute los índices de manera tal que el menor parámetro sea p_{12} y el menor de los que comparte un índice con él sea p_{13} .

Paso 2. Si $p_{12} \geq 0$, entonces la forma cuadrática satisface la condición (i) de la definición de reducción, en tal caso (i) ocurre y el proceso de reducción termina.

Paso 3. Si $p_{12} < 0$, y $|p_{12}| \leq p_{13}$ y $\min\{p_{03}, p_{04}, p_{34}\} \geq 0$ entonces la condición (ii) ocurre y el proceso de reducción termina.

Paso 4. Si $p_{12} < 0$ y $|p_{12}| > p_{13}$ entonces aplique la transformación (T1) y regrese al **Paso 1**.

Paso 5. Si $p_{12} < 0$ y $|p_{12}| \leq p_{13}$ y defina $p_{st} := \min\{p_{03}, p_{04}, p_{34}\} < 0$, entonces aplique una permutación que lleve a p_{st} y al menor parámetro que comparte un índice con él a los parámetros p_{12} y p_{13} respectivamente.

Paso 6. Si $|p_{12}| > p_{13}$ aplique la transformación (T1) y regrese al **Paso 1**, en caso contrario, aplique una permutación que fije p_{12} y envíe al menor parámetro con índices en $\{0, 3, 4\}$ a p_{34} .

Paso 7. Si $|p_{12} + p_{34}| \leq \min\{p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}\}$, entonces se cumple la condición (iii) y el proceso de reducción termina. En caso contrario, aplique una permutación que fije a p_{12} y p_{34} y que envíe en p_{13} al mínimo entre $\{p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}\}$, entonces aplique la transformación (T2) y regrese al **Paso 1**.

Ejemplo 3.1. Consideremos la forma cuadrática cuaternaria $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i, j \leq 4} p_{ij}(x_i - x_j)^2$, con parámetros $p_{01} = -2$, $p_{02} = 2$, $p_{03} = 2$, $p_{04} = 2$, $p_{12} = 2$, $p_{13} = 2$, $p_{14} = 1$, $p_{23} = 2$, $p_{24} = 2$ y $p_{34} = -2$, por comodidad denotamos por $\rho = [-2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, -2]$, el vector de parámetros ordenados como sigue: $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{24}, p_{34}]$.

Antes de comenzar el proceso de reducción veamos primero que Φ representa una FCCDP, equivalentemente un retículo 4-dimensional, para lo cual construimos

A_ρ , matriz tipo Gram asociada a Φ , y verificamos si dicha matriz es definida positiva. En este caso

$$A_\rho = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dado que los menores principales de A_ρ son 3, 20, 20 y 22, el criterio de Sylvester garantiza que la matriz es definida positiva, y por lo tanto ρ representa una FCCDP o un retículo 4-dimensional.

Para empezar el proceso de reducción ordenamos los parámetros de ρ de tal manera que un parámetro negativo, si lo hay, quede en la posición p_{12} , y el menor de los que comparten un índice con él quede en la posición p_{13} , en nuestro caso obtenemos: $\rho' = \text{Sel}(\rho) = [2, 2, 2, 2, -2, 1, 2, 2, 2, -2]$, puesto que $|p'_{12}| = 2 > 1 = p'_{13}$ podemos aplicar la transformación T1, que equivale a construir $[\rho'[2] + \rho'[5], \rho'[3] + \rho'[6], \rho'[5] + \rho'[6] + \rho'[7], \rho'[4] - \rho'[5] - \rho'[6], \rho'[8], -\rho'[5], \rho'[5] + \rho'[9], -\rho'[6], \rho'[6] + \rho'[10], \rho'[1] + \rho'[5] + \rho'[6]]$, así llegamos a: $\rho' = [0, 3, 1, 3, 2, 2, 0, -1, -1, 1]$, ahora reordenamos nuevamente para conseguir: $\rho'' = [3, 1, 3, 0, -1, -1, 2, 1, 2, 0]$.

Como ρ'' tiene dos parámetros negativos que comparten índices, aplicamos la transformación T1 de nuevo, y obtenemos $[0, 2, 0, 2, 1, 1, 1, 1, -1, 1]$ aplicamos Sel para reordenar y obtenemos $\rho''' = [2, 2, 0, 0, -1, 1, 1, 1, 1, 1]$, el cual satisface la condición (ii) de la Definición 2.1, por lo tanto ρ''' está en forma reducida y el retículo inicial es de Tipo II. Se pueden reordenar los parámetros nuevamente para que el parámetro negativo, en este caso -1 , ocupe la primera posición. De ese modo el proceso de reducción de Charve concluye dando como resultado un vector de parámetros $[-1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 0]$ que es aritméticamente equivalente a ρ . Por lo tanto la forma cuadrática reducida asociada a Φ es:

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = -(x_0 - x_1)^2 + (x_0 - x_2)^2 + 2(x_0 - x_3)^2 + (x_0 - x_4)^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_4)^2$$

En una investigación sobre el problema del cuantizador óptimo en retículos euclidianos 4-dimensionales, hemos encontrado que para poder calcular el valor de la constante de cuantización de un tal retículo, es indispensable conocer su tipo primitivo, este hecho hace que los algoritmos aquí presentados jueguen un papel esencial en nuestro intento de resolver el problema del retículo cuantizador óptimo 4-dimensional.

4 Implementación

A continuación presentamos el código de una posible implementación del algoritmo de reducción arriba descrito, el mismo puede ejecutarse en el toolbox de

Ejemplo 3.1. Consideremos la forma cuadrática cuaternaria $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i, j \leq 4} p_{ij}(x_i - x_j)^2$, con parámetros $p_{01} = -2$, $p_{02} = 2$, $p_{03} = 2$, $p_{04} = 2$, $p_{12} = 2$, $p_{13} = 2$, $p_{14} = 1$, $p_{23} = 2$, $p_{24} = 2$ y $p_{34} = -2$, por comodidad denotamos por $\rho = [-2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, -2]$, el vector de parámetros ordenados como sigue: $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{24}, p_{34}]$.

Antes de comenzar el proceso de reducción veamos primero que Φ representa una FCCDP, equivalentemente un retículo 4-dimensional, para lo cual construimos A_ρ , matriz tipo Gram asociada a Φ , y verificamos si dicha matriz es definida positiva. En este caso

$$A_\rho = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dado que los menores principales de A_ρ son 3, 20, 20 y 22, el criterio de Sylvester garantiza que la matriz es definida positiva, y por lo tanto ρ representa una FCCDP o un retículo 4-dimensional.

Para empezar el proceso de reducción ordenamos los parámetros de ρ de tal manera que un parámetro negativo, si lo hay, quede en la posición p_{12} , y el menor de los que comparten un índice con él quede en la posición p_{13} , en nuestro caso obtenemos: $\rho' = \text{Sel}(\rho) = [2, 2, 2, 2, -2, 1, 2, 2, 2, -2]$, puesto que $|p'_{12}| = 2 > 1 = p'_{13}$ podemos aplicar la transformación T1, que equivale a construir $[\rho'[2] + \rho'[5], \rho'[3] + \rho'[6], \rho'[5] + \rho'[6] + \rho'[7], \rho'[4] - \rho'[5] - \rho'[6], \rho'[8], -\rho'[5], \rho'[5] + \rho'[9], -\rho'[6], \rho'[6] + \rho'[10], \rho'[1] + \rho'[5] + \rho'[6]]$, así llegamos a: $\rho' = [0, 3, 1, 3, 2, 2, 0, -1, -1, 1]$, ahora reordenamos nuevamente para conseguir: $\rho'' = [3, 1, 3, 0, -1, -1, 2, 1, 2, 0]$.

Como ρ'' tiene dos parámetros negativos que comparten índices, aplicamos la transformación T1 de nuevo, y obtenemos $[0, 2, 0, 2, 1, 1, 1, 1, -1, 1]$ aplicamos Sel para reordenar y obtenemos $\rho''' = [2, 2, 0, 0, -1, 1, 1, 1, 1, 1]$, el cual satisface la condición (ii) de la Definición 2.1, por lo tanto ρ''' está en forma reducida y el retículo inicial es de Tipo II. Se pueden reordenar los parámetros nuevamente para que el parámetro negativo, en este caso -1 , ocupe la primera posición. De ese modo el proceso de reducción de Charve concluye dando como resultado un vector de parámetros $[-1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 0]$ que es aritméticamente equivalente a ρ . Por lo tanto la forma cuadrática reducida asociada a Φ es:

```

{1, 4} = 7, {2, 3} = 8, {2, 4} = 9,
{3, 4} = 10);

S:= table(0 = {1, 2, 3, 4}, 1 = {1, 5, 6, 7},
          2 = {2, 5, 8, 9}, 3 = {3, 6, 8, 10},
          4 = {4, 7, 9, 10}):

N:=select({$1..10 }, x -> p[x] < 0);
if nops(N)=0 then
  return(p) else
  mm:= min(op([aux(i, p) $ i in N]));
  x:=select(N, i -> aux(i, p)=mm)[1];
  I0:=T[x];
  N1:=(S[I0[1]] union S[I0[2]]);
  x0:=select(N1, y1 -> p[y1]=min({p[i] $i in N1 }))[1];
  I0:=T[x0];
  N2:=N1 minus {x0 };
  x1:=select(select(N2, y1 -> p[y1] + p[x0]=mm),
             x -> nops(T[x0] minus T[x]) = 1 and
             nops(T[x] minus T[x0]) = 1 and
             nops(T[x] intersect T[x0]) = 1)[1];
  I1:=T[x1]; i:=op(I0 intersect I1);
  j:=op(I0 minus I1); k:=op(I1 minus I0);
  U1:={0, 1, 2, 3, 4} minus {i, j, k};
  U:=table(0=min(U1), 1=i, 2=j, 3=k, 4=max(U1)):
  p0:=[p[Tinv[{min({U[T[11][1]], U[T[11][2]]})},
          max( { U[T[11][1]], U[T[11][2]] } })] $ l1 = 1..10];
  return(p0);
end_if;
end_proc:

```

Ahora implementamos las transformaciones T1 y T2.

```

T1:=proc(rho)
/* Aplica la transformación T1 a rho y reordena con el procedimiento Sel. */
local p;
begin
  p:=Sel(rho);
  while p[5]<0 and abs(p[5])>p[6] do
    p:= Sel([ p[2]+p[5], p[3]+p[6], p[5]+p[6]+p[7],
             p[4]-p[5]-p[6], p[8], -p[5], p[5]+p[9],
             -p[6], p[6]+p[10], p[11]+p[5]+p[6]]);
  end_while;
  return(p);
end_proc

```

La transformación T2.

```

T2:=proc(rho)
/* Aplica la transformación T2 a rho y reordena con el procedimiento Sel. */
local p;
begin
  p:=Sel(rho);
  while abs(p[5]) <= p[6] and min(p[3],p[4],p[10])<0 and
        abs(p[5]+p[10])>p[6] do
    h:=min({p[i] $i in {3,4,10}});
    x:=select({3,4,10}, y -> p[y]=h)[1];
    I2:=T[x];
    N1:={ Tinv[{1,I2[1]}], Tinv[{1,I2[2]}],
          Tinv[{2,I2[1]}], Tinv[{2,I2[1]}] };
    b:=min({p[i] $i in N1});
    x1:=select(N1, y1 -> p[y1]=b)[1];
    I3:=T[x1];
    i:=op({1,2} minus I3);
    j:=op({1,2} minus {i});
    k:=op(I3 intersect I2);
    l:=op(I2 minus {k});

```

```

m:=op({$0..4} minus {i,j,k,l});
U:= table(0=m,1=i,2=j,3=k, 4=1);
p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]], U[T[1][2]]})},
      max({U[T[1][1]], U[T[1][2]]})}}] $1=1..10];
p:=Sel([-p[5]+p[6], p[5]+p[6]+p[9]+p[10], p[6]+p[3]+p[10],
      p[2]+p[5]-p[10], p[1]+p[5]+p[6], p[6], p[5]+p[7],
      -p[6]-p[10], p[4]+p[10]-p[5], p[8]+p[10]])
end_while;
return(p);
end_proc;

```

Finalmente implementamos el algoritmo de reducción de Charve.

```

RC:=proc(rho)
/* Recibe los parámetros de Selling y devuelve la FCCDP reducida en el sentido
de la Definición 2.1. */

local T,Tinv,h,x,x1,I1,I2,I3,N1,b,i,j,k,l,m,U,contador,phi;
begin
  contador:=0; /* Un contador */
  if DP(rho)=0 then return("No es un retículo"); end_if;
  p:=rho;
  T:=table(1 = {0,1}, 2 = {0,2}, 3 = {0,3},
          4 = {0,4}, 5 = {1,2}, 6 = {1,3},
          7 = {1,4}, 8 = {2,3}, 9 = {2,4}, 10 = {3,4});

  Tinv:=table({0,1}=1, {0,2}=2, {0,3}=3,
             {0,4}=4, {1,2}=5, {1,3}=6,
             {1,4}=7, {2,3}=8, {2,4}=9,{3,4}=10);

  S:= table( 0 = {1,2,3,4}, 1 = {1,5,6,7},
            2 = {2,5,8,9}, 3={3,6,8,10},
            4 = {4,7,9,10});

  repeat
    p:=Sel(p);
    /* Identificación de Tipo I */
    if p[5]>=0 then
      /* El retículo es tipo I */
      /* Reordena */
      U:= table(0=2,1=1,2=0,3=3,4=4):
      p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]],U[T[1][2]]})},
            max({U[T[1][1]],U[T[1][2]]})}}] $1=1..10];
      contador:=1;
      return(p,1);
    elif abs(p[5])>p[6] then
      p:=T1(p);
    elif abs(p[5])<=p[6] and min(p[3],p[4],p[10])>=0 then
      /* El retículo es tipo II */
      /* para ordenar las coordenadas negativas */
      U:= table(0=2,1=1,2=3,3=0,4=4):
      p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]],U[T[1][2]]})},
            max({U[T[1][1]],U[T[1][2]]})}}] $1=1..10];
      contador:=1;
      return(p,2);
    elif abs(p[5])<=p[6] and min(p[3],p[4],p[10])<0 then
      p:=Sel(p);
      h:=min({p[i] $i in {3,4,10}});
      x:=select({3,4,10},y->p[y]=h)[1];
      I2:=T[x];
      N1:={Tinv[{1,I2[1]}],Tinv[{1,I2[2]}],
          Tinv[{2,I2[1]}],Tinv[{2,I2[1]}]};
      b:=min({p[i] $i in N1});
      x1:=select(N1,y1->p[y1]=b)[1];
      I3:=T[x1];
      i:=op({1,2} minus I3);
      j:=op({1,2} minus {i});
      k:=op(I3 intersect I2);
      l:=op(I2 minus {k});
      m:=op({$0..4} minus {i,j,k,l});
      U:= table(0=m,1=i,2=j,3=k, 4=1):

```

```

p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]],U[T[1][2]]},
              max({U[T[1][1]],U[T[1][2]})}]]] $1=1..10];
if abs(p[5]+p[10])>p[6] then
  p:=Sel([-p[5]+p[6]), p[5]+p[6]+p[9]+p[10],
         p[6]+p[3]+p[10], p[2]+p[5]-p[10],
         p[1]+p[5]+p[6], p[6], p[5]+p[7],
         -p[6]-p[10], p[4]+p[10]-p[5],
         p[8]+p[10]]);
else
  /* El retículo es tipo III */
  /* para ordenar las coordenadas negativas */
  U:= table(0=2,1=1,2=0,3=3,4=4):
  p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]],U[T[1][2]]},
              max({U[T[1][1]],U[T[1][2]})}]]] $1=1..10];
  contador:=1;
  return(p,3);
end_if;
end_if;
until contador=1;
end_repeat;
return(p);
end_proc;

```

Referencias bibliograficas

- [1] Barnes, E. S. and Sloane, N. J. A. (1983). The optimal lattice quantizer in three dimensions. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 4 (1) 30–41.
- [2] <http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/>
- [3] Charve, L. (1882). De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives, *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* 2, tome 11, 119–134.
- [4] Conway, J. H. (with the assistance of F.Y.C. Fung), The sensual (quadratic) form, *Carus Mathematical Monographs*, 26 Math. Assoc. of America, Washington, DC (1997).
- [5] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A. (1999). Sphere Packing, Lattices and Groups. *Springer-Verlag 3rd Edition*.
- [6] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A. (1992). Low-dimensional lattices. VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 436, 55–68.
- [7] Conway J.H. and Sloane, N. J. A. (1982). Voronoi regions of lattices, second moments of polytopes, and quantization, *PGIT* 28, 211–226 \cong Chap. 21 of book “Sphere Packing, Lattices and Groups. *Springer-Verlag 3rd Edition* (1999).”
- [8] Conway J. H. and Sloane, N. J. A. (1984). On the Voronoi regions of certain lattices, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 5 (3), 294–305.
- [9] Delone, B. N. (1929). Sur la partition régulière de l'espace á 4-dimensions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* 7, 79–110 and 145–164.

- [10] Engel, P. and Grishukhin, V. P. (2002). There are exactly 222 L -types of primitive five-dimensional lattices. *European J. Combin.* 23, no. 3, 275–279.
- [11] Deza, M. and Grishukhin, V. P. (2008). More about 52 four-dimensional parallelotopes, *Taiwanese J. Math.* 12, no. 4, 901–916. <http://arxiv.org/pdf/math/0307171>.
- [12] Fedorov, E. S. Elements of the study of figures. *Zap. Mineralog. Obsc.* (2) 21, 1–279. Reprinted by Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1953.
- [13] Lenstra, A.K; Lenstra, H. W. Jr. and Lovásk, L. (1982). Factoring polinomials with rational coefficients. *Math. Ann.*, 261, 515–534.
- [14] Ryškov, S. S. and Baranovskii, E. P. (1978.). C -types of n -dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelohedra (with application to the theory of coverings). *Proc. Steklov Inst. Math.*, no. 4, 140 pp.
- [15] Schürmann, A. (2009). Computational Geometry of Positive Definite Quadratic Forms: Polyhedral Reduction Theories, Algorithms, and Applications, *AMS*, 162 pages.
- [16] Schürmann, A. and Vallentin F. (2005). Computational Approaches to Lattice Packing and Covering Problems, <http://arxiv.org/pdf/math/0403272v3>, 40 pages.
- [17] Vallentin, F. (2003). Sphere covering, lattices, and tilings (in low dimensions), *Ph.D. thesis, Technical University Munich, Germany*, 128 pages.
- [18] Voronoi, G. F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 97–178; 134 (1908) 198–287; 136, (1909) 67–181 [2,21].

Dirección del autor

Juan Miguel Velásquez Soto
 Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
juan.m.velasquez@correounivalle.edu.co