



Introduction to Knot Theory

Jhon Jader Mira Albanés
Universidad Nacional de Colombia

José Gregorio Rodríguez Nieto
Universidad Nacional de Colombia

Olga Patricia Salazar Díaz
Universidad Nacional de Colombia

Received: May 2, 2016

Accepted: December 15, 2016

Pag.111-145

Abstract

In this paper we give a short introduction to knot theory focusing on the two-bridge classical knot family. We describe the M. Toro's codification, the fundamental group of a classical knot complement and the recognition problem for virtual knots.

We also provide an algorithm to find a family of non classical virtual knots such that its groups would correspond to groups of two-bridge classical knot.

Keywords: Classical knots, Virtual knots, Two bridges knots, Two bridge knot groups.

Introducción a la teoría de nudos

Resumen

En este artículo damos una breve introducción a la teoría de nudos, pero enfocada en la familia de los nudos clásicos de dos puentes. Hacemos una descripción de la codificación de M. Toro, el grupo fundamental del complemento de un nudo en el espacio tridimensional y el problema de la distinción de nudos virtuales.

También proporcionamos un algoritmo para hallar una familia de nudos virtuales no clásicos cuyos grupos correspondan a grupos de nudos clásicos de dos puentes.

Palabras clave: Nudos de dos puentes, nudos combinatorios de dos puentes, grupo de un nudo, codificación de nudos.

1 Introducción

En la actualidad la teoría clásica de nudos es entendida como el estudio de las clases de isotopía ambiente de encajes de S^1 o copias disjuntas de S^1 en el espacio tridimensional.

A principios del siglo XX dicha teoría era considerada una pieza fundamental para algunas áreas que se encargan del estudio de propiedades químicas, atómicas y leyes de la física y no fue hasta el año 1920, cuando Alexander ⁽¹⁾ probó que toda 3-variedad cerrada y conexa es una cubierta ramificada de S^3 con conjunto de ramificación un nudo, que se le dio un lugar privilegiado en la topología de baja dimensión, en especial al problema de clasificación de nudos.

Aunque parecería que la teoría de nudos nació como una rama de la topología de baja dimensión con los trabajos de K. F. Gauss a inicios del siglo XX, ésta realmente surgió en el área de la matemática aplicada con los trabajos de W. Thomson sobre átomos vórtices, véase ⁽²⁾. En la actualidad, se han encontrado nuevas aplicaciones de la teoría de nudos, por ejemplo, en el empaque y desempaque del ADN, una reacción enzimática convierte las hebras de ADN en nudos, hebras enlazadas o en una forma más ordenada. La teoría de nudos puede ayudar a que los científicos descubran mecanismos mediante los cuales estas enzimas funcionen, véase ^(3,4) para más detalles. Las conexiones de los nudos con la física teórica pueden consultarse en ⁽⁵⁾.

Para abordar el problema de clasificación de nudos, se necesitaba un mejor entendimiento combinatorio de estos objetos. Por tanto, a lo largo de su historia, los matemáticos han usado varias aproximaciones, una de ellas y, de hecho, la más fundamental, es la del concepto de "diagrama regular".

En la década de los 20's, Reidemeister ⁽⁶⁾ definió una serie de movimientos, llamados movimientos de Reidemeister, sobre el conjunto de los diagramas de nudos y probó que existe una correspondencia biunívoca entre las clases de isotopía ambiente de nudos en R^3 y las clases de equivalencia, generada por los movimientos de Reidemeister e isotopías del plano de diagramas de nudos.

El teorema de Reidemeister abrió las puertas a la teoría de codificación de nudos. De esta forma, a cada diagrama de un nudo, podemos asociarle un código que lo caracterice completamente. Una de las ventajas de trabajar con códigos es que no necesitamos el uso de diagramas y las definiciones y pruebas son presentadas por medio de algoritmos, fáciles de implementar, usando programas de computación simbólica, tales como *mathematica*. Al codificar nudos, hay que tener cuidado debido a que al definir los movimientos de Reidemeister sobre el conjunto de códigos, pueden aparecer representantes en las clases que no correspondan a diagramas de nudos. Este hecho permitió mostrar la existencia de extensiones no triviales de la teoría clásica de nudos; por ejemplo, los nudos virtuales.

En la literatura existen varias formas de codificar nudos; por ejemplo, Toro ⁽⁷⁾ utiliza los nudos combinatorios; Kauffman ⁽⁸⁾, los códigos de Gauss y Conway ⁽⁹⁾, los tangles.

En los 90's, Kauffman definió *nudo virtual*, extendiendo el concepto de diagrama de un nudo. Un *diagrama de un nudo virtual* es una inmersión de S^1 o de una unión disjunta de copias de S^1 en el plano que tiene un número infinito de puntos dobles, que son transversales. Estos puntos dobles, que llamamos también cruces, están clasificados como clásicos por encima por debajo y, virtuales, cruces encerrados por un círculo. *Los movimientos extendidos de Reidemeister* son una colección de movimientos, que

definen una relación de equivalencia, sobre el conjunto de los diagramas de nudos virtuales.

Kauffman ⁽⁸⁾ mostró que algunos invariantes de nudos clásicos, que se pueden calcular a partir del diagrama del nudo. Pueden ser extendidos a invariantes de nudos virtuales, entre ellos, el número de puentes, el grupo fundamental, los sistemas periféricos, los quandles, el polinomio bracket, el polinomio de Kauffman y el polinomio de Jones. La forma general cómo estos invariantes de nudos clásicos pueden ser extendidos a nudos virtuales, se basa en omitir los cruces virtuales. Kauffman construyó ejemplos de diagramas de nudos virtuales, no clásicos y, por ende, no triviales, para los cuales los invariantes mencionados anteriormente tienen propiedades que no se cumplen o que aún no se han podido probar para la categoría de los nudos clásicos.

Este artículo tiene la doble finalidad de introducir y motivar el estudio de los nudos. Por un lado, damos una serie de conceptos básicos de la teoría clásica de nudos y, a través de métodos algorítmicos, llegamos a la idea de Kauffman de los nudos virtuales. Nos enfocamos en el estudio del grupo de nudos clásicos y virtuales, damos un algoritmo para hallar la presentación por encima del grupo de nudos clásicos, el cual se emula para hallar la presentación por encima en el caso virtual, además, usando este algoritmo mostramos formas de recuperar nudos virtuales a partir de ciertas presentaciones. Para más detalles, véase ^(10,11). Estudiamos representaciones de grupos de nudos de dos puentes, usando las técnicas de R. Riley ⁽¹²⁾ y H. Hilden, M. T. Lozano y J. M. Montesinos sobre representaciones en álgebras cuaterniónicas ⁽¹³⁾.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: En la sección 2 hacemos un estudio corto de nudos, nudos combinatorios y nudos virtuales. También damos la definición de grupo de un nudo, nudos tres coloreables y representaciones de grupos de nudos. En la sección 3, damos un algoritmo para hallar el nudo combinatorio de un nudo de dos puentes sin la necesidad de hallar primero el diagrama. Estudiamos el grupo de un nudo de dos puentes, así como sus representaciones parabólicas en el grupo de las transformaciones de Möbius. Estudiamos el problema de hallar nudos combinatorios a partir de presentaciones similares de las de Wirtinger de nudos de dos puentes.

2 Conceptos básicos

En esta sección damos algunas definiciones y resultados, sin detenernos mucho en los detalles, sobre nudos, nudos combinatorios, el grupo de un nudo y nudos virtuales.

2.1 Nudos en S^3

Decimos que K es un *nudo* (o *nudo clásico*) si existe una función continua e inyectiva de S^1 en S^3 (o \mathbb{R}^3) cuya imagen es K . De manera intuitiva podemos imaginarnos un nudo K como un trozo de cuerda anudado en el espacio, al cual le hemos unido sus extremos.

Dos nudos K_1 y K_2 *equivalentes* si y sólo si existe un homeomorfismo $f: S^3 \rightarrow S^3$, que preserve la orientación, tal que $f(K_1) = K_2$.

Debido a que todo homeomorfismo de S^3 en sí mismo es el extremo de una isotopía ambiente y viceversa, tenemos la prueba del siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si y sólo si existe una isotopía ambiente $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ de S^3 tal que $h_1(K_1) = K_2$.*

Una *proyección regular* de un nudo K consiste en proyectar el nudo sobre el plano $z = 0$, de tal forma que más de dos puntos no se puedan proyectar sobre uno mismo y dos segmentos no puedan tener la misma proyección.

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 2.2 *Un diagrama de un nudo es un grafo planar 4-valente orientado y conexo, tal que los grados de entrada y salida de cada uno de sus vértices son iguales a 2 y pueden ser dibujados de acuerdo a la Figura 1-a.*

Siguiendo la idea de la definición anterior, al dibujar las proyecciones regulares de los nudos tendremos el cuidado de dejar algunos espacios en blanco alrededor de los puntos dobles, que llamamos *cruces*, indicando cuál de los puntos va por encima y así poder recobrar el nudo a partir de la proyección. La Figura 1-a muestra un ejemplo de una proyección regular de un nudo.

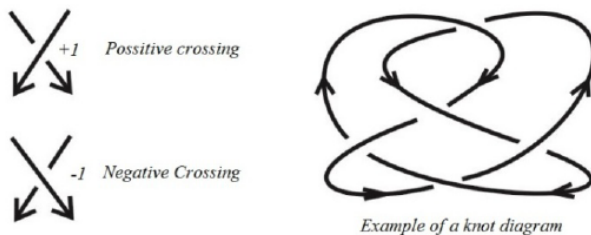


Figura 1. *Clasificación de los cruces de un diagrama de un nudo.*

Como podemos ver, las proyecciones regulares de nudos son diagramas de nudos. Los cruces de un diagrama de un nudo son clasificados de acuerdo a la Figura 1-b. Así que podemos hablar de *cruce por debajo* y *cruce por encima*. Entonces, a la sección del diagrama que va de un cruce por debajo al siguiente cruce por debajo se le llama *arco del diagrama*; en otras palabras, los arcos son los componentes conexos del diagrama del nudo.

Un nudo tiene infinitos diagramas, pero cada uno de ellos se puede transformar en el otro mediante un número finito de los movimientos de Reidemeister (véase Figura 2) e isotopías del plano.

El nudo cuya proyección regular no tiene cruces es llamado *nudo suelto*.

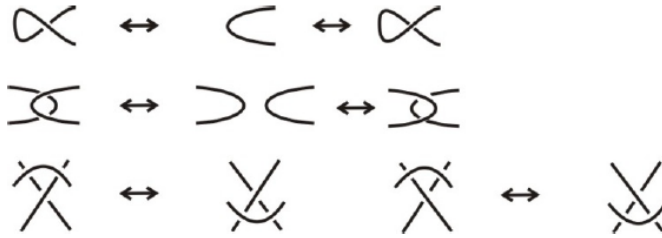


Figura 2. Movimientos de Reidemeister.

La prueba del siguiente teorema puede ser consultada en ⁽⁶⁾.

Teorema 2.3 (Teorema de Reidemeister). *Dos nudos son equivalentes si y sólo si sus respectivos diagramas se pueden transformar el uno en el otro mediante un número finito de los movimientos de Reidemeister e isotopías del plano.*

Por el teorema anterior, no hacemos distinción entre los diagramas de nudos y los nudos mismos. Un nudo es *trivial* si este es equivalente al nudo suelto.

2.2 Construcción de códigos

Sea K un diagrama de un nudo y etiquetemos sus cruces con números a_1, a_2, \dots, a_n en \mathbb{Z}^+ , donde n es el número de cruces clásicos de K . Tomemos un punto x sobre K , que no sea un cruce. Recorramos el diagrama a partir de x hasta retornar a dicho punto en el sentido de la orientación y formemos una lista con los números de los cruces que nos vayamos encontrando en el recorrido, con la convención de que si pasamos por debajo del cruce a_i , escribimos $-a_i$ y si pasamos por encima del cruce a_i , escribimos a_i . Denotemos la lista construida anteriormente por $C(K)$ y llamémosla *lista de cruces*. Construyamos la lista (e_1, e_2, \dots, e_m) , donde $m = \max_{i=1,2,\dots,3} \{a_i\}$ y para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, $e_j = 1$ si $j = a_i$ y el cruce a_i es positivo, $e_j = -1$ si $j = a_i$ y el cruce a_i es negativo y $e_j = 1$ (ó $e_j = -1$), en los otros casos. Esta lista la denotamos por $S(K)$ y la llamamos *lista de signos*.

A la pareja ordenada $(C(K); S(K))$ la llamamos *nudo combinatorio* de K . Notemos que con esta convención pueden existir enteros, entre 1 y m , que no correspondan a cruces del nudo.

Consideremos el diagrama K mostrado en la Figura 3. Si recorremos K a partir del punto x obtenemos el código:

$$((-4, 6, -2, 4, -6, 2), (1, 1, 1, 1, 1, 1)).$$

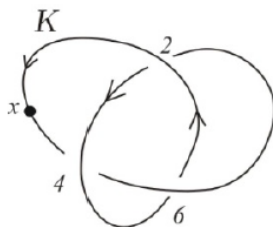


Figura 3. Diagrama de nudos clásicos enumerados.

La construcción anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.4 ⁽⁷⁾ Un **nudo combinatorio** o **código** de n cruces es una pareja ordenada,

$$((i_1, i_2, \dots, i_{2n}); (e_1, \dots, e_m)),$$

tal que, como conjuntos, $\{i_1, i_2, \dots, i_{2n}\} = \{\pm a_1, \dots, \pm a_n\}$, donde a_1, \dots, a_n en \mathbb{N} , son llamados **cruces del código**, $m \geq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $e_j \in \{1, -1\}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Definimos el **código trivial** como $((), ())$.

Ahora bien, dado un diagrama de un nudo K siempre existe un nudo combinatorio asociado a K , pero el recíproco no siempre es cierto; por ejemplo, el nudo combinatorio $\sigma = ((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2); (1, -1, 1, -1))$ no es el nudo combinatorio de un diagrama de un nudo. La Figura 4 muestra un intento por construir un diagrama para σ . Observemos que es imposible conectar los extremos g y h sin crear un nuevo cruce.

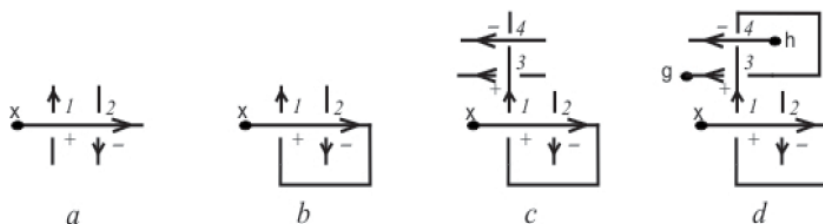


Figura 4. Construcción de diagramas.

Es claro que el proceso anterior no es una prueba rigurosa de que σ no es un nudo combinatorio asociado a un diagrama de un nudo.

De la construcción de nudo combinatorio, a partir de un diagrama de un nudo y por el Teorema de la curva cerrada de Jordan, podemos inferir la prueba de la siguiente proposición:

Proposición 2.5. Si $\sigma = ((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$ es un nudo combinatorio asociado a un diagrama de un nudo, entonces el número de ocurrencias entre a_i y $-a_i$ en $(i_1, i_2, \dots, i_{2n})$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, es par.

De la proposición anterior, el nudo combinatorio σ del ejemplo anterior no es el nudo combinatorio de un diagrama de un nudo.

Definición 2.6. Un nudo combinatorio es **geométrico** si es el nudo combinatorio de un diagrama de un nudo.

Como podemos observar, a un mismo diagrama de un nudo K se le pueden asociar muchos nudos combinatorios dependiendo de la numeración de los cruces y del punto base que escojamos, sin contar con los movimientos de Reidemeister. En ^(7,14,15) se define una relación de equivalencia sobre los nudos combinatorios y en ⁽²⁶⁾ se prueba que existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia de nudos y las clases de equivalencia de nudos combinatorios geométricos, así que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que nuestros nudos combinatorios $K = ((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, e_2, \dots, e_n))$ satisfacen $\{i_1, i_2, \dots, i_{2n}\} = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ y son escritos en la forma:

$$K = ((-1, A_1, -2, A_2, \dots, -n, A_n); (e_1, \dots, e_n)), \quad (1)$$

donde $A_i, i = 1; 2, \dots, n$, son subsucesiones disjuntas de i_1, i_2, \dots, i_{2n} y, además, $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Es posible que algunas de las subsucesiones anteriores sean vacías. Esta forma es llamada *forma normal estándar*.

Si hacemos $x_i = (-i, A_i, -(i + 1))$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, y $x_n = (-n, A_n, -1)$, entonces x_i es llamado *arco del nudo*, $i = 1, 2, \dots, n$. Más aún, si el cardinal de x_i es mayor que 2, entonces x_i es denominado *punte*. A los puentes los denotamos por y_1, \dots, y_k y k es llamado el *número de puentes de K* . El mínimo número de puentes entre todos los nudos de la clase es llamado el *número de puentes de la clase*.

Este concepto está dado también para los diagramas de nudos. Intuitivamente un puente para un diagrama de un nudo es un "componente conexo" de éste que tiene por lo menos un cruce por encima. El número de estos componentes conexos es el *número de puentes del diagrama*. El *número de puentes del nudo* es el mínimo número de puentes entre sus diagramas asociados.

Ejemplos de diagramas de nudos de dos y tres puentes son dados en la Figura 5.

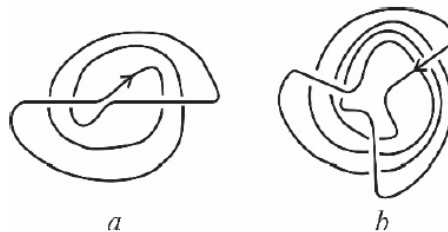


Figura 5. Ejemplos de nudos de dos y tres puentes.

Definición 2.7 A las clases de equivalencia del nudo combinatorio K la denotamos por $[K]$ y decimos que un nudo combinatorio $[K]$ es *clásico* si y sólo si K es geométrico.

Puesto que el problema de la clasificación de nudos sigue siendo un problema abierto, muchos expertos en el área se han dedicado a clasificar ciertas familias de nudos; entre tales familias se encuentran los nudos de dos y tres puentes. La subclase de los nudos de dos puentes fue clasificada en 1956 por H. Schubert (véase ⁽¹⁶⁾). La clasificación completa de los nudos de tres puentes aún no se conoce, pero viene siendo desarrollada por H. Hilden, J. Montesinos, D. Tejada y M. Toro (véase ⁽¹⁷⁾).

2.3 El grupo de un nudo

El grupo $\Pi(K)$ de un nudo K es uno de los invariantes más antiguos y poderosos en la teoría clásica de nudos. Este grupo se define como el grupo fundamental de la 3-variedad $S^3 \setminus K$.

En la literatura existen métodos para calcular presentaciones del grupo de un nudo, una de ellas es conocida como presentación de Wirtinger.

Definición 2.8 (Presentación de Wirtinger). *Sea G un grupo. Una presentación de Wirtinger de G es una presentación de la forma*

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_p : r_1, r_2, \dots, r_q \rangle,$$

donde $r_k = x_j^{w_k} x_i^{-1}$, $1 \leq i, j \leq p$ y w_1, \dots, w_q son palabras en el grupo libre $F(x_1, \dots, x_p)$, no son necesariamente distintas en G .

Una presentación de Wirtinger se llama cíclica si tiene la forma

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m \rangle,$$

donde $r_i = x_i^{w_i} x_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $w_1, \dots, w_m \in F(x_1, \dots, x_n)$, no son necesariamente distintas en G .

Una presentación de Wirtinger se llama realizable si $w_i = x_{k_i}^{\varepsilon_i}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$.

A partir de cualquier diagrama D del nudo K podemos definir una presentación de Wirtinger realizable $\pi_1(D)$, en la que cada arco de D corresponde a un generador y las relaciones son definidas como se indica en la Figura 6.

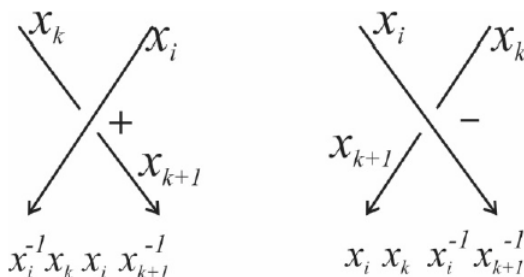


Figura 6. Relaciones de Wirtinger.

Es bien sabido que la presentación $\pi_1(D)$ es un invariante del nudo K . (véase ⁽¹⁸⁾).

Teorema 2.9 ⁽¹⁹⁾ *Si el grupo de un nudo es cíclico infinito, entonces el nudo es equivalente al nudo trivial (S^1).*

El problema de determinar si un nudo es trivial o no, conocido como *el problema de desanudamiento*, fue uno de los primeros en ser resuelto. En ⁽²⁰⁾, W. Haken da un algoritmo para determinar cuándo un nudo es trivial o no.

La prueba del siguiente teorema puede ser consultada en ⁽²¹⁾.

Teorema 2.10 *El problema del desanudamiento está en NP.*

Una herramienta bastante poderosa para determinar si un nudo es o no equivalente al nudo suelto, es la teoría de representaciones de grupos. Por medio de esta técnica se han podido encontrar familias infinitas de nudos no triviales.

El estudio de las representaciones de este tipo de grupos no solo se ha usado en esta dirección, también en el estudio de los problemas de geometrización de las tres variedades, en particular de los complementos de nudos en el espacio tridimensional. Por ejemplo, si tenemos una representación de $\Pi(K)$ en $SL(2, \mathbb{C})$, entonces, también tendríamos una en $PSL(2, \mathbb{C})$, el recíproco no siempre es cierto (véase ⁽²²⁾), puesto que este último grupo es isomorfo al grupo de las isometrías, que preservan la orientación, del modelo hiperbólico del semiespacio superior, entonces, por el teorema de extensión de Poincaré (véase ⁽²⁾ para más detalles) podríamos definir acciones de $\Pi(K)$ en alguna de las tres variedades.

El estudio del conjunto de las órbitas para el caso de acciones fieles puede ser bastante interesante en el siguiente sentido: Si G denota la imagen de una representación no abeliana y fiel ρ y si $\Delta \subset \hat{\mathbb{C}}$ es un dominio fundamental asociado a G , entonces, el conjunto de órbitas bajo la acción de G sobre Δ puede tener estructura de variedad bajo ciertas condiciones. Más aún, podemos extender la acción al semi-espacio superior y considerar un dominio fundamental Ω donde $G \cdot \Omega$ podría ser un polígono de Dirichlet (véase ⁽²⁾ para la construcción) en \mathbb{H}^3 y preguntarnos sobre la geometría de Ω/G .

Por otro lado, hallar representaciones del grupo del nudo en el grupo simétrico S_3 también es una herramienta para distinguir nudos. Existe una familia de nudos cuyos grupos tienen representaciones en S_3 ; esta familia se llama *colección de nudos 3-coloreables*.

Definición 2.11 *Un diagrama de un nudo es 3-coloreable si podemos pintar sus arcos con tres colores $R = \text{rojo}$, $A = \text{azul}$ y $V = \text{verde}$, de tal forma que todos los colores sean usados y en cada cruce aparezcan o los tres colores o un solo color.*

No es difícil probar que ser 3-coloreable es invariante bajo los movimientos de Reidemeister y que, además, el nudo trivial no es 3-coloreable. La Figura 5 muestra un

ejemplo de un nudo 3-coloreable (a) y otro que no es 3-coloreable (b). ¿Cómo se prueba que tal nudo no es 3-coloreable?

Teorema 2.12 Si K es 3-coloreable, entonces existe una representación de $\Pi(K)$ en el grupo simétrico S_3 .

Demostración. Supongamos que K es 3-coloreable y escojamos una coloración de sus arcos. Separemos los generadores de $\Pi(K)$ en tres grupos de acuerdo a su respectivo color. Supongamos que $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ es la respectiva presentación de Wirtinger de $\Pi(K)$. Consideremos el homomorfismo natural

$$\mu : \langle x_1, \dots, x_n \mid \rangle \rightarrow S_3,$$

donde

$$\mu(x_i) = \begin{cases} (12) & \text{si } x_i \text{ corresponde al color rojo} \\ (13) & \text{si } x_i \text{ corresponde al color azul} \\ (23) & \text{si } x_i \text{ corresponde al color verde} \end{cases} \quad (2)$$

Debido a que

$$\begin{aligned} (12)(23)(12) &= (13), \\ (23)(12)(23) &= (13), \\ (13)(12)(23) &= (21), \end{aligned} \quad (3)$$

entonces $\ker(\mu) = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$, con lo que μ extiende a un homomorfismo de $\Pi(K)$ en S_3 .

El siguiente algoritmo nos da una forma eficiente de calcular una presentación del grupo de un nudo. Puesto que es bien conocido y su prueba se obtiene al aplicar una sucesión adecuada de transformaciones de Tietze, omitiremos su demostración.

Algoritmo 2.13 (Algoritmo para hallar la presentación por encima). Sea D un diagrama de un nudo con puentes denotados por y_1, \dots, y_k como se indica en la Figura 7. Aquí, $e_{k_i} = 1$ si el cruce es positivo o $e_{k_i} = -1$ si el cruce es negativo.

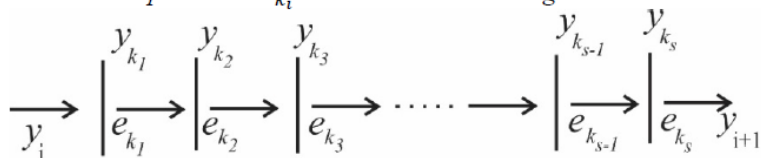


Figura 7. Presentación en puentes.

Para cada puente y_i escoja un punto z_i .

- (i) Recorra el diagrama D desde el punto z_i en el sentido de su orientación.
- (ii) Escriba una palabra w_i con las etiquetas de los puentes que recorra por debajo, con la siguiente convención: escribimos y_t (o y_t^{-1}) si el signo del cruce con respecto al cual se recorre el puente por debajo es positivo (negativo).

(iii) Termine el proceso hasta llegar al puente y_{t+1} .

(iv) Con la notación descrita en la Figura 7, obtenemos

$$w_i = y_{k_1}^{e_{k_1}} y_{k_2}^{e_{k_2}} y_{k_3}^{e_{k_3}} \cdots y_{k_{s-1}}^{e_{k_{s-1}}} y_{k_s}^{e_{k_s}}.$$

Se prueba que $y_i W_i = w_i y_{i+1}$ y, además que $\Pi(D) = G(w_1, \dots, w_k)$.

De lo anterior, tenemos la prueba del siguiente teorema: (otra puede ser consultada en ⁽¹¹⁾).

Teorema 2.14 Sea D un diagrama de un nudo y sean y_1, \dots, y_k sus puentes, entonces existen palabras w_1, \dots, w_k en el grupo libre $F(y_1, \dots, y_k)$, tales que

$$\Pi(D) = \langle y_1, \dots, y_k \mid w_1^{-1} y_1 w_1 y_2^{-1}, \dots, w_{k-1}^{-1} y_{k-1} w_{k-1} y_k^{-1}, w_k^{-1} y_k w_k y_1^{-1} \rangle \quad (4)$$

La presentación anterior es conocida como presentación por encima del grupo de un nudo. Usamos la notación $G(w_1, \dots, w_n)$ para indicar la presentación ⁽³¹⁾.

Ejemplo 2.15. Una presentación por encima del grupo del nudo, mostrado en la Figura 5-a, está dada por $G(y_x; x_y)$ y para el grupo del nudo de la Figura 5-b, es $G(x_2 x_3 x_1, x_3 x_1 x_2, x_1 x_2 x_3)$.

Definición 2.16. Sea K un nudo y $\sigma = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$ un nudo combinatorio asociado a K . Si $G(w_1, \dots, w_k)$ es una presentación por encima del grupo de K , definimos la pareja periférica de K como el par $(l_m = w_1 \cdots w_k m^{-p}, m)$, donde $p = \sum_{i=1}^n e_{a_i}$ y $m \in \{y_1, \dots, y_n\}$.

A la palabra l_m se le llama una longitud del nudo y a m , un meridiano.

Decimos que dos parejas periféricas (l_m, m) y $(l_{m'}, m')$ son conjugadas si existe $\tau \in G(w_1, \dots, w_k)$ tal que $l_m = \tau l_{m'} \tau^{-1}$ y $m = \tau m' \tau^{-1}$. En ⁽¹¹⁾, definimos la estructura periférica de un nudo como la clase conjugada en $G(w_1, \dots, w_k)$ de una pareja periférica. En ⁽¹¹⁾, se prueba que la estructura periférica es única, salvo la conjugación.

La tripleta $(G(w_1, \dots, w_k); l_m, m)$ se llama sistema periférico. Dos sistemas periféricos son isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo entre los grupos de los nudos que envía una estructura periférica a la otra. El teorema de Waldhausen afirma que los nudos están completamente determinados por sus sistemas periféricos. (Véase ⁽²³⁾). Para la prueba del siguiente teorema, véanse ^(23,24).

Teorema 2.17 Si $(G(w_1, \dots, w_k); l_m, m)$ es un sistema periférico de un nudo y l_m es 1, donde 1 representa la identidad de $G(w_1, \dots, w_k)$, entonces el nudo es trivial.

La deficiencia de una presentación es la diferencia entre el número de generadores y el número de relaciones. La deficiencia de un grupo es el máximo de las deficiencias de las presentaciones de un grupo si tal número existe. Aunque es bien sabido que la

deficiencia del grupo de un nudo es 1, aquí presentamos una prueba combinatoria de este hecho, pero antes, probamos el siguiente resultado: (Su prueba fue realizada por O. P. Salazar en ⁽²⁵⁾).

Teorema 2.18 Si G es el grupo de un nudo, entonces $G = G' \rtimes \mathbb{Z}$, donde G' es el conmutador de G . Por tanto, $G/G' \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. No es difícil probar que G/G' es isomorfo a \mathbb{Z} , sea t tal que $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Sabemos que G tiene una presentación de la forma

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle,$$

donde $r_k = x_i^{-\varepsilon} x_k x_i^\varepsilon x_{k+1}^{-1}$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Consideremos el homomorfismo $\pi: \langle x_1, \dots, x_n \mid \rangle \rightarrow \langle t \rangle$, dado por $x_i \mapsto t$, para todo i . Puesto que $\pi(r_k) = 1$, entonces π define un homomorfismo de G sobre \mathbb{Z} que también llamamos π .

Puesto que $G' \subset \text{Ker}(\pi)$, entonces $\frac{G/G'}{\text{Ker}(\pi)/G'} \cong \mathbb{Z}$, luego $G' = \text{Ker}(\pi)$. Por tanto, podemos definir la sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow G' \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \rightarrow 1, \tag{5}$$

Además, si definimos el homomorfismo $\Psi: \mathbb{Z} \rightarrow G, t \mapsto x_1$, entonces, $(\pi \circ \Psi)(t) = t$. Por tanto, la sucesión exacta (5) es escindida, por lo que $G = G' \rtimes \mathbb{Z}$.

La prueba del siguiente teorema usa el hecho de que el grupo de un nudo tiene una presentación con deficiencia 1 (véase ⁽¹⁸⁾).

Teorema 2.19 La deficiencia del grupo de un nudo es 1.

Demostración. Supongamos que tenemos una presentación

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle,$$

donde $r_k = x_i^{-\varepsilon} x_k x_i^\varepsilon x_{k+1}^{-1}$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Puesto que $G/G' \cong \mathbb{Z}$, entonces tenemos una variable libre que denotamos por x_1 . Si $n = 1$, entonces no existe ninguna relación no trivial.

Supongamos que $n > 1$. Dado que G/G' es un grupo abeliano, podemos despejar a x_n de una de las m relaciones como $x_n^{i_n} = x_1^{i_1} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}}$ y, tal que i_n es 1 o un divisor de las potencias de x_n en las otras relaciones. Reemplacemos x_n en todas las relaciones que aparezca y así, eliminemos una relación y un generador. Supongamos que $m > n - 1$ y repitamos el proceso para x_{n-1} . Eliminemos entonces otra relación y otro generador, continuemos hasta encontrar una expresión para x_2 . Hasta aquí, hemos eliminado $n - 2$ relaciones y $n - 2$ generadores. Es claro que las relaciones en las que pueda despejarse x_2 son de la forma $x_2 = x_1^k$. Si x_1 es libre, debe darse que $k = 0$ y, si x_1 no es libre, entonces $k = \pm 1$, así, las otras $m - n + 1$ relaciones son redundantes. Por tanto, la presentación de G no requiere más de $n - 1$ relaciones. Si

$m < n - 1$, entonces los restantes $n - m$ generadores son libres, lo cual es imposible por la presentación de G/G' .

Por último, cabe aclarar que en general el grupo de un nudo no es un invariante completo; es decir, existen nudos que no son equivalentes y, sin embargo, sus respectivos grupos son isomorfos. Pero, si los nudos son primos, entonces este grupo los distingue, salvo la imagen espejo e inverso. Estas definiciones pueden ser consultadas en ⁽¹⁸⁾. Así, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.20 Sean K_1 y K_2 nudos primos. Si $\Pi(K_1)$ es isomorfo a $\Pi(K_2)$, entonces K_1 es equivalente a K_2 o a la imagen espejo de K_2 o al inverso de K_2 o al inverso de la imagen espejo de K_2 .

2.4. La idea de Kauffman

Como habíamos visto previamente, existen nudos combinatorios que no provienen de diagramas de nudos. Entonces, ¿qué debemos hacer con estos códigos? Para resolver este interrogante, L. H. Kauffman (véase ⁽⁸⁾), permitió un nuevo tipo de cruce que él denominó *cruce virtual* y trabajar con el diagrama haciendo caso omiso del nuevo cruce. A ese tipo de diagramas, Kauffman los llamó *diagramas de nudos virtuales*.

Si completamos el proceso descrito en la Figura 4, teniendo en cuenta la idea de Kauffman, obtenemos el diagrama mostrado en la Figura 8. Así, podemos asegurar que a cada nudo combinatorio le corresponde un nudo virtual y viceversa. La prueba de esta última afirmación no es difícil de obtener. Para más detalles, véase ⁽¹¹⁾.

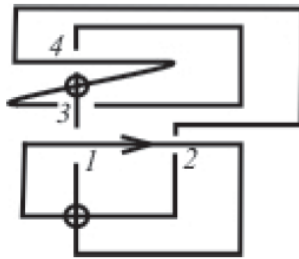


Figura 8. Construcción de un diagrama de nudo virtual.

Kauffman definió una serie de movimientos, llamados movimientos extendidos de Reidemeister sobre estos diagramas, al considerar los mostrados en la Figura 9 que, junto con los movimientos de Reidemeister, definen una relación de equivalencia. Él probó, entre otras cosas, que los nudos pueden ser vistos como una subcategoría de los nudos virtuales. En ⁽¹⁵⁾, se prueba que existe una correspondencia biunívoca entre las categorías de los nudos virtuales y los combinatorios.



Figura 9. Movimientos virtuales de Reidemeister.

Definición 2.21 *Un nudo combinatorio es clásico si es equivalente a un nudo combinatorio geométrico.*

Existen condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un nudo combinatorio es geométrico (véanse ^(15,26)). La siguiente condición es necesaria, pero no suficiente para determinar cuándo un nudo combinatorio no es geométrico:

Proposición 2.22 *Sea $K = ((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, e_2, \dots, e_n))$ un nudo combinatorio. Aplicando permutaciones cíclicas sobre $(i_1, i_2, \dots, i_{2n})$ supondremos que*

$$K = ((-e_{a_j} a_j, S_{a_j}, e_{a_j} a_j, \tilde{S}_{a_j}), (e_1, \dots, e_m)),$$

donde S_{a_j} es una subsucesión de i_1, i_2, \dots, i_{2n} .

Si $\alpha_{a_j}(K) = \sum_{g \in S_{a_j}} \frac{|g|}{g} e_{|g|} \neq 0$, donde $|g|$ denota el valor absoluto de g , entonces K no es geométrico.

El siguiente polinomio fue definido en ⁽¹⁶⁾ para diagramas de nudos virtuales. Aquí usaremos los nudos combinatorios para dar una definición alternativa:

Definición 2.23 *Sea $[K]$ la clase de equivalencia de un nudo combinatorio K con cruces a_1, \dots, a_n , entonces el polinomio $P_{[K]}(t)$ es el polinomio*

$$P_{[K]}(t) = \sum_{i=1, \alpha_{a_i}(K) \neq 0}^n (e_i t^{|\alpha_{a_i}(K)|})$$

Y $P_{[K]}(t) = 0$ si $\alpha_{a_i}(K) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

En ⁽¹⁵⁾ se prueba que $P_{[K]}(t)$ es un invariante de nudos combinatorios y, por tanto, de nudos virtuales. Dicho polinomio tiene la particularidad de ser cero sobre la categoría de los nudos combinatorios clásicos.

Aunque en la literatura existen muchas técnicas (véase, por ejemplo, ^(8,27-29)) para determinar cuándo un nudo virtual no es equivalente a un diagrama de un nudo clásico, éste sigue siendo aún un problema abierto. La técnica expuesta en ⁽³⁰⁾ y en ⁽¹⁵⁾ parece ser una buena aproximación a resolver dicho interrogante.

La definición del grupo de un nudo virtual se hizo a nivel de diagramas, haciendo caso omiso de los cruces virtuales; es decir, que algunos arcos pasarán a través de cruces virtuales y las relaciones se obtendrán en los cruces que no sean virtuales. Usando los nudos combinatorios, podemos definir lo que es el número de puentes para los nudos virtuales y tener el siguiente teorema (para la prueba véase ⁽¹¹⁾):

Teorema 2.24 *Sea K un nudo virtual y sea $\Pi(K)$ su grupo. Si K tiene k puentes, y_1, \dots, y_k , entonces existen palabras w_1, \dots, w_k en el grupo libre $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$ tales que $\Pi(K) = \langle y_1, \dots, y_k \mid y_i w_i = w_i y_{i+1}, i = 1, 2, \dots, k \rangle$. Las palabras w_1, \dots, w_k se computan de la misma forma que la descrita en el Algoritmo 2.13.*

Al permitir los movimientos virtuales de Reidemeister sobre los diagramas de nudos, podemos tener la siguiente definición alternativa de número de puentes virtuales, como sigue: sea D un diagrama de un nudo y denotemos sus clases $[D]$ y $[D]_v$ bajo los movimientos de Reidemeister y los movimientos extendidos de Reidemeister, respectivamente. Entonces, tenemos el número de puentes virtuales, denotado $b([D]_v)$ y el número de puentes real $b([D])$, como el mínimo número de puentes en las respectivas clases. Es claro que $b([D]_v) \leq b([D])$. ¿Es posible tener la igualdad?

La definición de grupo de un nudo virtual de Kauffman no tiene el carácter topológico de la hebra para los nudos en S^3 , sin embargo, es posible definir un grupo de esa misma forma. Para ello, debemos introducir lo que comúnmente se conoce como *realización de nudos virtuales en superficies engrosadas*, véase ⁽⁷⁾.

Definición 2.25 *Una superficie engrosada es una 3-variedad de la forma $\Sigma \times [0,1]$, donde Σ es una superficie orientable y compacta. Un subconjunto K de $\Sigma \times [0,1]$ es llamado un nudo generalizado si existe un encaje de S^1 en $\Sigma \times [0,1]$, que preserva la orientación, cuya imagen es K .*

En forma análoga al caso de los nudos en S^3 , podemos pensar en diagramas de nudos generalizados sobre superficies orientables y compactas. Además, puesto que los movimientos de Reidemeister sólo afectan una parte del diagrama dentro de un disco pequeño, podemos pensar en los movimientos de Reidemeister para el caso de diagramas de nudos generalizados sobre superficies orientables y compactas. Sólo debemos tener cuidado de que los diagramas no intersecten la frontera de la superficie donde yacen.

Aunque no hay un teorema análogo al de Reidemeister que relacione los nudos generalizados con sus diagramas, podemos hacer la siguiente definición (véanse ^(8,28)):

Definición 2.26 *Sean D_i un diagrama de un nudo sobre una superficie orientable y compacta Σ_i , $i = 1, 2$. Decimos que (Σ_1, D_1) es geotópico a (Σ_2, D_2) , denotado $(\Sigma_1, D_1) \stackrel{g}{\sim} (\Sigma_2, D_2)$ si existe una superficie orientable y compacta Σ_3 y embebimientos, que preservan orientación $f_i: \Sigma_i \rightarrow \Sigma_3$, $i = 1, 2$ tales que, $f_1(D_1)$ se pueda transformar en $f_2(D_2)$ mediante un número finito de los movimientos de Reidemeister sobre Σ_3 .*

Al conjunto de todas las parejas ordenadas de la forma (Σ, D) , donde Σ es una superficie orientable y compacta y D es un diagrama de un nudo sobre ésta, lo denotaremos por \mathcal{D} .

Definition 2.1 ⁽²⁸⁾ Sean $(\Sigma, K), (\Sigma', K') \in \mathcal{D}$. Estos dos elementos son establemente equivalentes, denotado por $(\Sigma, K) \sim (\Sigma', K')$, si existen $(\Sigma_i, K_i) \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots, n$, tales que

$$(\Sigma, K) \stackrel{e}{\sim} (\Sigma_1, K_1) \stackrel{e}{\sim} \dots \stackrel{e}{\sim} (\Sigma_n, K_n) \stackrel{e}{\sim} (\Sigma', K').$$

Un ejemplo de dos diagramas de nudos generalizados establemente equivalentes se ilustra en la Figura 10.

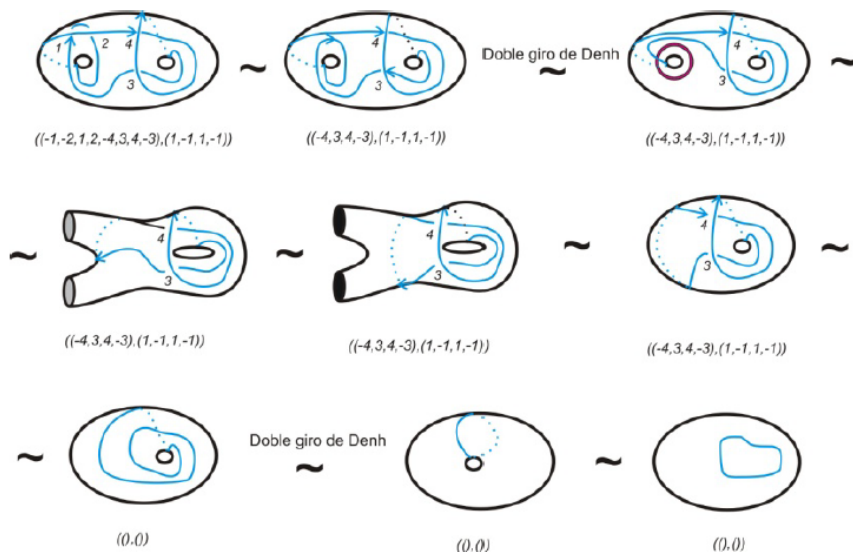


Figura 10. Nudos generalizados establemente equivalentes.

En la Figura 11 mostramos, por medio de un ejemplo, la relación que hay entre diagramas de nudos virtuales y los nudos generalizados.

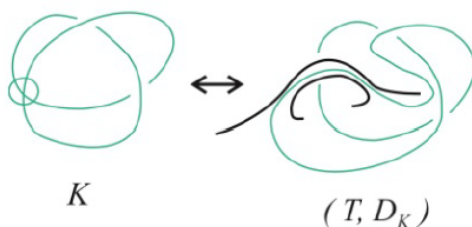


Figura 11. Relación entre los nudos virtuales y los nudos generalizados.

Una prueba del siguiente teorema puede ser consultada en ⁽²⁸⁾.

Teorema 2.27 Existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia de nudos virtuales y las clases de equivalencia estable de nudos generalizados.

Demostración. En la figura 12 se da una idea intuitiva de la demostración.

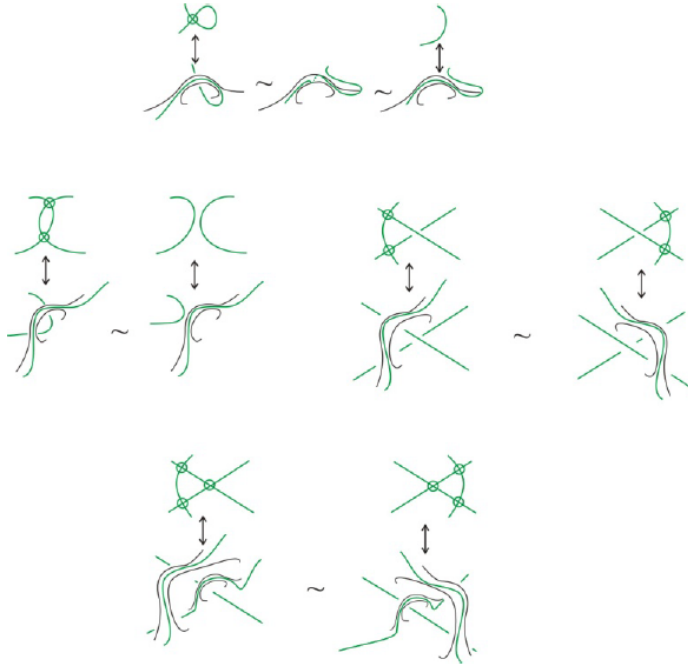


Figura 12. Relación entre los movimientos virtuales de Reidemeister y la equivalencia estable.

Podemos, así, también definir el grupo de un nudo virtual como el grupo fundamental del complemento de una realización de éste en alguna superficie engrosada. Probablemente este grupo no sea un invariante de nudos virtuales, pero sí podemos hacernos preguntas interesantes, como por ejemplo, sobre la geometría del complemento de nudos generalizados y si ésta está conectada con representaciones de los grupos de nudos virtuales en $PSL(2, \mathbb{C})$ como pasa con el caso clásico.

La prueba del siguiente teorema es inmediata; por tanto, la omitiremos.

Teorema 2.28 Si K es un nudo virtual de longitud 1 y tiene un grupo no cíclico, entonces K no es equivalente a un nudo clásico.

3 Nudos combinatorios de 2 puentes

Dados α, β primos relativos, tales que $0 < \alpha, -\alpha < \beta < \alpha$ y α sea impar, construimos un nudo combinatorio de 2 puentes que se puedan realizar como un nudo

en S^3 . Probamos que esta realización corresponde a la construcción de Schubert, véase (18).

Para los siguientes resultados, α y β son primos relativos, tales que $0 < \alpha, 0 < \beta < \alpha$ y α es impar.

Teorema 3.1 Para todo $k \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$,

- (1) El número $k\beta$ no es congruente con $t\alpha$ módulo 2α , para $t = 1, 2$,
- (2) Existe un único $t_k \in (0, \alpha) \cup (\alpha, 2\alpha) \cap \mathbb{Z}$ tal que $k\beta \equiv t_k \pmod{2\alpha}$ y
- (3) Como conjuntos

$$\{|\alpha - t_k| : k = 1, 2, \dots, \alpha - 1\} = \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}.$$

Demostración. (1): Probemos el caso $t = 1$, pues el caso $t = 2$ es similar. Supongamos que existe k en $\{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ tal que $k\beta \equiv \alpha \pmod{2\alpha}$. Si β es par, entonces α sería par, que es un absurdo. Si β es impar, puesto que $\alpha\beta \equiv \alpha \pmod{2\alpha}$, se tendría que $k\beta \equiv \alpha\beta \pmod{2\alpha}$, de donde existe $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $\alpha\beta - k\beta = 2n\alpha$ y, así, $(\alpha - k)\beta = 2n\alpha$ y, por tanto, $(\alpha - k)\beta$ es múltiplo común de β y α . Puesto que $(\alpha, \beta) = 1$, entonces el mínimo común múltiplo de α y β es $\alpha\beta$, así que, $\alpha\beta \leq (\alpha - k)\beta$, que es un absurdo.

(2): Si $0 < k\beta < 2\alpha$, entonces $t_k = k\beta$. Por otro lado, si $k\beta > 2\alpha$, existen n, r enteros, tales que $k\beta = n(2\alpha) + r$, con $0 < r < 2\alpha$. En este caso, hacemos $t_k = r$.

Sea $k \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ y sean $t_k, t'_k \in (0, \alpha) \cup (\alpha, 2\alpha)$, tales que $k\beta \equiv t_k \pmod{2\alpha}$ y $k\beta \equiv t'_k \pmod{2\alpha}$. Entonces, $|t_k - t'_k| = 2m\alpha$, para algún $m \in \mathbb{Z}^+$. Por otro lado $|t_k - t'_k| < 2\alpha$, de donde $m = 0$ y así $t_k = t'_k$.

(3): Se tiene de (2).

De lo anterior, podemos definir lo que llamaremos sucesiones puentes.

Definición 3.2 Las sucesiones puente están definidas como:

$$A_1 = n_1, n_2, \dots, n_{\alpha-1} - 1, A_2 = m_1, m_2, \dots, m_\alpha,$$

donde

$$n_{|\alpha-t_k|} = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ es par} \\ \alpha + (k - 1) & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \tag{6}$$

$$m_{|\alpha-t_k|} = \begin{cases} \alpha + (k - 1) & \text{si } k \text{ es par} \\ k & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \tag{7}$$

$k = 1, 2, \dots, \alpha - 1$.

Con la idea de no dar una notación recargada, usamos, sin temor a confusión, la letra A_i para denotar tanto a la sucesión puente A_i , como al conjunto ordenado $\{A_i\}$, $i = 1, 2$.

Teorema 3.3 *Las sucesiones puentes están bien definidas. Más aún,*

- (1) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y
- (2) $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, \dots, 2\alpha - 2\}$.

Por tanto si $B_1 = -1, -2, \dots, -(\alpha - 1), B_2 = -\alpha, -(\alpha + 1), \dots, -(2\alpha - 2)$ y $e_1, e_2, \dots, e_{2\alpha-2} \in \{1, -1\}$, son tales que $e_k = -1$ si $t_k \in (\alpha, 2\alpha)$ ó $e_k = 1$ si $t_k \in (0, \alpha)$, para $k = 1, 2, \dots, \alpha - 1$ y $e_{\alpha+(j-1)} = e_j$, para $j = 1, 2, \dots, \alpha - 1$, entonces

$$K_{\alpha,\beta} = ((A_1, B_1, A_2, B_2), (e_1, e_2, \dots, e_{2\alpha-2}))$$

es un nudo combinatorio.

Demostración. (1): Razonemos por el absurdo, supongamos que existe $b \in A_1 \cap A_2$, entonces $b = n_x = m_y$ para algunos $x, y \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$. Por Teorema 3.1, existen $s, r \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ tal que $n_x = n_{|\alpha-t_s|}$ y $m_y = m_{|\alpha-t_r|}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si s es un número par, entonces $b = n_x = n_{|\alpha-t_s|} = s$. Ahora bien, si r es par, $m_y = m_{|\alpha-t_r|} = \alpha + (r - 1)$, de donde $s = b = m_y = \alpha + (r - 1) \notin \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ contradiciendo la escogencia de s . Si r es impar, $s = r$ que, tampoco es posible, ya que s es par y r es impar.

Caso 2: Si s es un número impar, entonces $b = n_x = n_{|\alpha-t_s|} = \alpha + (s - 1)$. Ahora bien, si r es par, $m_y = m_{|\alpha-t_r|} = \alpha + (r - 1)$, de donde $\alpha + (s - 1) = b = m_y = \alpha + (r - 1)$, y así $s = r$ que no es posible, ya que s es impar y t es par. Si r es impar, $m_y = m_{|\alpha-t_r|} = r$, reemplazando, $\alpha + (s - 1) = r$, lo que implicará que $r \notin \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$, contradiciendo la escogencia de r .

(2): Sea $r \in \{1; 2, \dots, 2\alpha - 2\}$. Supongamos que $1 \leq r \leq \alpha - 1$. Si r es par, entonces $r = n_{|\alpha-t_r|} \in A_1$. Si r es impar, $r = m_{|\alpha-t_r|} \in A_2$.

Por otro lado, si $\alpha \leq r \leq 2\alpha - 2$, existe $k \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ tal que $r = \alpha + (k - 1)$ (tome $k = r - (\alpha - 1)$). Si k es par, $r = m_{|\alpha-t_k|} \in A_2$ y si k es impar, $r = n_{|\alpha-t_k|} \in A_1$. De lo anterior, $r \in A_1 \cup A_2$.

Dados α, β primos relativos tales que $0 < \alpha, 0 < \beta < \alpha$, existe un diagrama de un nudo de dos puentes, denotado $S(\alpha, \beta)$, asociado a α y β , véase ⁽⁸⁾.

Teorema 3.4 *El nudo combinatorio $K_{\alpha,\beta}$ es geométrico.*

Demostración. Para probar que $S(\alpha, \beta)$ es una realización de $K_{\alpha,\beta}$, debemos ilustrar la construcción de Schubert, véase ⁽¹⁸⁾. Consideremos la Figura 13, donde A_1 y A_2 representarán los puentes del diagrama $S(\alpha, \beta)$.

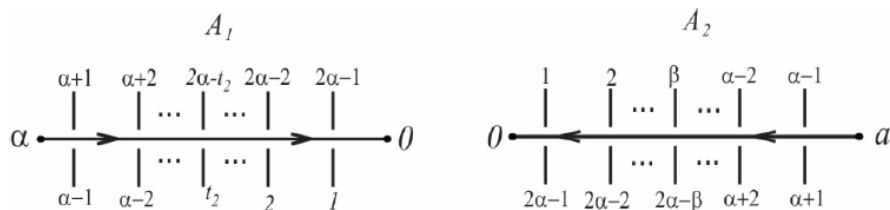


Figura 13. Descripción de los puentes de $S(\alpha, \beta)$.

Recorramos la parte A_1 , desde el punto α hasta 0. Tracemos una curva desde 0 hasta el segmento etiquetado con β , en A_2 y enumeremos dicho cruce con el número 1, como se muestra en la Figura 14. Observemos que si recorremos A_2 desde α hasta 0, la posición del 1, en dicho recorrido, es $\alpha - \beta$.

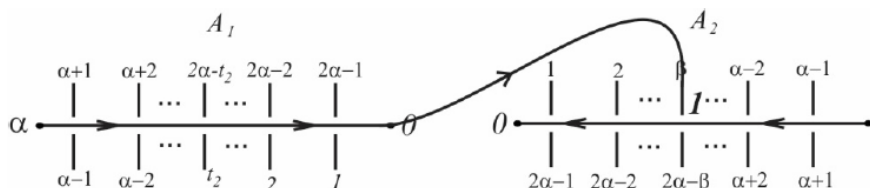


Figura 14. Paso 1.

Busquemos en A_1 el segmento etiquetado con t_2 y tracemos una curva desde el segmento etiquetado con $2\alpha - \beta$ hasta el segmento etiquetado con t_2 y enumeremos dicho cruce con el número 2, como se muestra en la Figura 15. Observemos que si recorremos A_1 desde α hasta 0, la posición del 2, en dicho recorrido, es $|\alpha - t_2|$. En general si $\alpha < t_2 < 2\alpha$, la posición del 2 es $|\alpha - t_2|$.

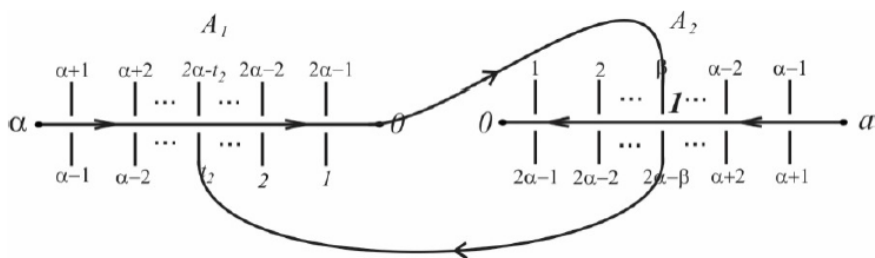


Figura 15. Paso 2.

Repitamos el proceso anterior hasta $t_{\alpha-1}$ y tracemos una curva desde el segmento etiquetado con $2\alpha - t_{\alpha-1}$ hasta el punto α en A_2 . Luego, recorramos A_2 desde α hasta 0 y tracemos una curva desde 0 hasta el segmento etiquetado con β en A_1 y etiquetemos ese cruce con α . Busquemos en A_2 el segmento etiquetado con t_2 y tracemos una curva desde el segmento etiquetado con $2\alpha - \beta$, en A_1 hasta el segmento etiquetado con t_2 , en A_2 y nombremos dicho cruce con el número $\alpha + 1$. Repitamos este proceso hasta $t_{\alpha-1}$.

El proceso anterior produce un diagrama de un nudo clásico de dos puentes y una enumeración de sus cruces con números enteros desde 1 hasta $2\alpha - 2$, de tal forma que si recorremos el diagrama $S(\alpha, \beta)$ a partir del punto α en A_1 , se produce un código nudal de la forma

$$((B_1, -1, -2, \dots, -(\alpha - 1), B_2, -\alpha, -(\alpha + 1), \dots, -(2\alpha - 2)), (e'_1, e'_2, \dots, e'_{2\alpha-2})),$$

donde la posición $|\alpha - t_k|$ en B_1 es k si es par entre 1 y $\alpha - 1$ o es $\alpha + (k - 1)$ si k es impar entre 1 y $\alpha - 1$. La posición $|\alpha - t_k|$ en B_2 es k si es impar entre 1 y $\alpha - 1$ o es $\alpha + (k - 1)$ si k es par entre 1 y $\alpha - 1$. Con lo que $B_1 = A_1$ y $B_2 = A_2$. Por último, por la misma numeración de los cruces siempre estamos entrando por el segmento etiquetado con t_k , con lo que $e'_k = 1$, si $1 \leq t_k < \alpha$ o $e'_k = -1$ si $\alpha < t_k < 2\alpha$, con lo que $e'_j = e_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, 2\alpha - 2$.

Definición 3.5 Sean α y β primos relativos $\alpha > 0, -\alpha < \beta < 0$ y α impar. Definimos $K_{\alpha, \beta}$ como el nudo combinatorio dado por

$$((A_1, -1, -2, \dots, -(\alpha - 1), A_2, -\alpha, -(\alpha + 1), \dots, -(2\alpha - 2)), (-e_1, -e_2, \dots, -e_{2\alpha-2})).$$

La prueba del siguiente teorema puede ser encontrada en ^[6], Teorema 2.1.3].

Teorema 3.6 Los nudos combinatorios $K_{\alpha, \beta}$ y $K_{\alpha', \beta'}$ son equivalentes si y sólo si $\alpha = \alpha'$ y $\beta \equiv \beta' \pmod{\alpha}$ ó $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$.

Teorema 3.7 Sean α y s primos relativos, tales que $0 < \alpha - \alpha < s < \alpha$ y s es par, entonces existe β impar, con $-\alpha < \beta < \alpha$, tal que $s\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$. Con lo que $K_{\alpha, s} \approx K_{\alpha, \beta}$.

Demostración. Por el teorema 57 en ⁽³¹⁾, existe $0 < x < \alpha$ tal que $sx \equiv 1 \pmod{\alpha}$. Ahora bien, si x es impar, tomemos $\beta = x$. Si x es par, entonces $\beta = x - \alpha$, es impar, $-\alpha < \beta < 0$ y $s\beta \equiv sx \equiv 1 \pmod{\alpha}$. De lo anterior, la existencia del número β está garantizada.

Por otro lado, puesto que $s\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$, entonces $(\beta, \alpha) = 1$ y así, $K_{\alpha, \beta}$ es un nudo. Por el teorema 3.6, $K_{\alpha, s} \approx K_{\alpha, \beta}$.

La siguiente proposición nos dará otra forma de calcular la lista de signos de $K_{\alpha, \beta}$. Su prueba puede ser consultada en ⁽¹⁰⁾.

Proposición 3.8 Para $j \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$, sea $\hat{e}_j = \text{sign}(c_j) = \text{sign}(c_j)$ donde $-\alpha < c_j < \alpha$ y $j\beta \equiv c_j \pmod{2\alpha}$. Entonces $e_j = \hat{e}_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, \alpha - 1$.

Más aún, para $j \in \{1, 2, \dots, \frac{\alpha-1}{2}\}$, $\hat{e}_{\alpha-j} = \hat{e}_j$.

3.1 El grupo de un nudo de 2 puentes

Iniciamos esta sección con el siguiente teorema.

Teorema 3.9 Si $K = K_{\alpha,\beta}$, entonces la presentación por encima de $\Pi_1(K)$ está dada por

$$\Pi(K_{\alpha,\beta}) = \langle x, y : xw = wy, x = y \rangle, \tag{8}$$

donde $w = y^{e_1}x^{e_2} \dots y^{e_2}x^{e_1} y$ $\tau = y^{-e_1}x^{-e_2} \dots y^{-e_2}x^{-e_1}$.

Corolario 3.10 Dados α y β , $\Pi(K_{\alpha,\beta}) \cong \Pi(K_{\alpha,-\beta})$.

Proposición 3.11 Para todo α y β existe un único $s \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ par, tal que $s\beta \equiv -1 \pmod{\alpha}$ ó $s\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$.

Demostración. Hacemos la prueba para el caso $\beta > 0$, ya que el caso $\beta < 0$ es similar. Puesto que $(\beta, 2\alpha) = 1$, entonces por el teorema 57 en ⁽³¹⁾, las ecuaciones $x\beta \equiv (1 + \alpha) \pmod{2\alpha}$ y $y\beta \equiv (\alpha - 1) \pmod{2\alpha}$ tienen solución en $(0, \alpha)$. Probemos que tales soluciones son pares. En efecto, sea s una solución de la ecuación $x\beta \equiv (\alpha + 1) \pmod{\alpha}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $s\beta = \alpha + 1 + 2n\alpha$, puesto que $\alpha + 1 + 2n\alpha$ es par y β es impar, así que s debe ser par. Por otro lado, sea s una solución de la ecuación $y\beta \equiv (\alpha - 1) \pmod{\alpha}$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$, tal que $y\beta = \alpha - 1 + 2m\alpha$, como $\alpha - 1 + 2m\alpha$ es par y β es impar; por lo tanto, s debe ser par. Puesto que s es par, $s\beta \equiv (\alpha \pm 1) \pmod{2\alpha}$ equivale a que $s\beta \equiv \pm 1 \pmod{\alpha}$.

Por último, sean s y $s' \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ pares, tales que $s\beta \equiv \pm 1 \pmod{\alpha}$ y $s'\beta \equiv \pm 1 \pmod{\alpha}$ y $ys'\beta \equiv \pm 1 \pmod{\alpha}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $s - s' > 0$. Sean m y n enteros, tales que $s\beta = \pm 1 + m\alpha$ y $s'\beta = \pm 1 + n\alpha$, con lo que $(s - s')\beta = (m - n)\alpha$, puesto que $(\alpha, \beta) = 1$, entonces $[\alpha, \beta] = \alpha\beta$, donde $[\alpha, \beta]$ denota el mínimo común múltiplo de α y β , con lo que $(s - s')\beta \geq \alpha\beta$, que es un absurdo, ya que $s - s' < \alpha$, luego $s = s'$.

Teorema 3.12 Sean α, β primos relativos tales que: $0 < \alpha, -\alpha < \beta < \alpha$ y α impar. Sea $s = s(\alpha, \beta)$ el número par, tal que $2 \leq s \leq \alpha - 1$ y $s\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$ (ó $s\beta \equiv -1 \pmod{\alpha}$), entonces, para todo $\beta' \in (-\alpha, \alpha)$, tal que $s\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$ ó $s\beta' \equiv -1 \pmod{\alpha}$,

$$\Pi(K_{\alpha,\beta}) \cong \Pi(K_{\alpha,\beta'}).$$

Demostración. Supongamos que $s\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$, puesto que $(s, \alpha) = 1$ y $0 < s < \alpha$, entonces por el teorema 3.6, $K_{\alpha,\beta} \approx K_{\alpha,s}$. Ahora consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1: Si $s\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$, por el teorema 3.6, $K_{\alpha,s} \approx K_{\alpha,\beta'}$, con lo que, $K_{\alpha,\beta} \approx K_{\alpha,\beta'}$, y por la invarianza del grupo de un nudo, $\Pi(K_{\alpha,\beta}) \cong \Pi(K_{\alpha,\beta'})$.

Caso 2: Si $s\beta' \equiv -1 \pmod{\alpha}$, entonces $(-s)\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$. Por el teorema 3.6, $K_{\alpha,-s} \approx K_{\alpha,\beta'}$ y por la proposición 3.10, $\Pi(K_{\alpha,-s}) \cong \Pi(K_{\alpha,s})$.

Ahora supongamos que $s\beta \equiv -1 \pmod{\alpha}$, entonces $(-s)\beta \equiv 1 \pmod{\alpha}$. Puesto que $(-s, \alpha) = 1$, entonces, por el teorema 3.6, $K_{\alpha, \beta} \approx K_{\alpha, -s}$.

Haciendo un procedimiento análogo al caso anterior, se muestra que $\Pi(K_{\alpha, \beta})$ es isomorfo a $\Pi(K_{\alpha, \beta'})$.

Algunas aplicaciones del número s se dan en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.13 Para $\alpha = 7$ y $\beta = 3$, $\Pi(K_{7,3}) = \langle x, y : xw = wy, x\tau = \tau y \rangle$, donde $w = yxy^{-1}x^{-1}yx$ y $\tau = y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}$. Así, los relatores de $\Pi(K_{7,3})$ son:

$$\begin{aligned} r_1 &: xyxy^{-1}x^{-1}yx = yxy^{-1}1x^{-1}yxy, \\ r_2 &: xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y. \end{aligned}$$

Por otro lado, $2 \times 3 \equiv -1 \pmod{7}$, de donde $s = 2$. Si pasamos las 2 primeras letras del lado izquierdo, en la relación r_1 , al derecho y pasamos las dos últimas letras del lado derecho, en la misma relación, al izquierdo, obtenemos la relación r_2 .

Ejemplo 3.14 Para $\alpha = 13$ y $\beta = 3$, $\Pi(K_{13,3}) = \langle x, y : xw = wy, x\tau = \tau y \rangle$, donde $w = yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyx$ y $\tau = y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}$. Así, los relatores de $\Pi(K_{13,3})$ son:

$$\begin{aligned} r_1 &: xyxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyx = yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyxy \\ r_2 &: xy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y. \end{aligned}$$

Ahora bien, $4 \times 3 \equiv -1 \pmod{13}$, de donde $s = 4$. Si pasamos las 4 primeras letras del lado izquierdo, en la relación r_1 , al derecho y pasamos las 4 últimas letras del lado derecho, en la misma relación, al izquierdo, obtenemos la relación r_2 .

Ejemplo 3.15 Para $\alpha = 13$ y $\beta = 7$, $\Pi(K_{13,7}) = \langle x, y : xw = wy, x\tau = \tau y \rangle$, donde $w = yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x$ y $\tau = y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}$, reemplazando, encontramos que los relatores de $\Pi(K_{13,7})$ son:

$$\begin{aligned} r_1 &: xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x = yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy \\ r_2 &: xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1} = y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y. \end{aligned}$$

Puesto que $2 \times 7 \equiv 1 \pmod{13}$, $s = 2$. Si pasamos las 2 primeras letras del lado derecho, en la relación r_1 , al izquierdo y pasamos las 2 últimas letras del lado izquierdo, en la misma relación, al derecho, obtenemos la relación r_2 .

Ejemplo 3.16 Para $\alpha = 13$ y $\beta = 5$, $\Pi(K_{13,5}) = \langle x, y : xw = wy, x\tau = \tau y \rangle$, donde $w = yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}yx$ y $\tau = y^{-1}x^{-1}yxyx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}$. Reemplazando, encontramos que los relatores de $\Pi(K_{13,5})$ son:

$$r_1 : xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y = yxy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}yy$$

$$r_2 : xy^{-1}x^{-1}yxyx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1}yxyx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}y.$$

Puesto que $8 \times 5 \equiv 1 \pmod{13}, s = 8$. Si pasamos las 8 primeras letras del lado derecho, en la relación r_1 , al izquierdo y pasamos las 8 últimas letras del lado izquierdo, en la misma relación, al derecho, obtenemos la relación r_2 .

Procediendo de forma similar a lo hecho en los ejemplos anteriores, probamos en ⁽¹⁰⁾ el siguiente teorema:

Teorema 3.17 Para todo α y β , el relator $x\tau = \tau y$ es consecuencia del relator $xw = wy$, donde $w = y^{e_1} x^{e_2} \dots y^{e_2} x^{e_1} y \tau = y^{-e_1} x^{-e_2} \dots y^{-e_2} x^{-e_1}$. Por tanto, el grupo $\Pi(K_{\alpha,\beta})$ tiene deficiencia 1.

3.2 Representaciones de grupo de nudos de dos puentes

En esta sección estudiamos representaciones de los grupos de nudos de dos puentes en el grupo de matrices $SL(2, \mathbb{C})$, dando algunas condiciones sobre las palabras w_1, w_2 para que existan tales representaciones. Para más detalles véase ⁽³²⁾. También consideramos el caso general de representaciones en el álgebra quaterniónica $\mathbb{H} = \frac{\mu, \nu}{\mathbb{K}}$, véase ⁽¹³⁾.

Sea z un número complejo y consideremos las matrices parabólicas

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Sea $F = F(x, y)$ el grupo libre en los generadores $\{x, y\}$. Existen homomorfismos únicos,

$$H : F \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \text{ con } H(y) = B, y H(x) = A_z. \tag{10}$$

La imagen de F bajo este homomorfismo la denotamos Γ_z .

Si $w = y^{e_1} x^{e_2} \dots y^{e_{m-1}} x^{e_m} \in F$, a $H(w)$ la denotamos genéricamente por

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = B^{e_1} A_z^{e_2} \dots B^{e_{m-1}} A_z^{e_m}$$

por lo que a, b, c y d son polinomios en la variable z , véase [Proposition 1, ⁽³²⁾].

Para extender el homomorfismo H definido en (10) al grupo $G(w)$, se requieren condiciones que garanticen que las relaciones se preserven.

Teorema 3.18 Sea $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_z$, entonces $A_z W = WB$ si y sólo si $c = zb$ y $a = 0$.

Demostración. La igualdad $A_z W = WB$ es cierta si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ za + c & zb + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{pmatrix}$$

resolviendo estas ecuaciones obtenemos que $A_z W = WB$ si y sólo si $c = zb$ y $a = 0$.

Teorema 3.19 Sea $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = B^{e_1} A_z^{e_2} \dots B^{e_{\alpha-2}} A_z^{e_{\alpha-1}} \in F(x, y)$, α un número impar y $e_{\alpha-j} = e_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, para todo $j = 1, 2, \dots, \frac{\alpha-1}{2}$, entonces $zb = c$.

Demostración. Véase ⁽¹²⁾.

La prueba del siguiente teorema se hace por inducción matemática.

Teorema 3.20 Sea $W^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = B^{e_1} A_z^{e_2} \dots B^{e_{\alpha-2}} A_z^{e_{\alpha-1}}$, donde $e_j \in \mathbb{Z}^*$ y $e_{\alpha-j} = e_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, n = \frac{\alpha-1}{2}$; α impar mayor o igual a 3, entonces, $\text{grad}(a) = \text{grad}(c) = n$ y $\text{grad}(b) = \text{grad}(d) = n$.

Demostración. Aplicamos inducción sobre α . En efecto, si $\alpha = 3$, entonces

$$W^{(3)} = BA_z = \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $\text{grad}(a) = \text{grad}(c) = 1$ y $\text{grad}(b) = \text{grad}(d) = 0$.

Ahora bien, sea $W^\alpha = B^{e_1} A_z^{e_2} W^{\alpha-2} \dots B^{e_{\alpha-2}} A_z^{e_{\alpha-1}}$. Por hipótesis de inducción, en este caso tomando $m = \frac{\alpha-5}{2} < n$, se tiene que existen $x_0, y_0, y q_0$ en \mathbb{Z} , r, u y v en $\mathbb{Z}[z]$, donde $\text{grad}(r) < m, \text{grad}(u) < m - 1$ y $\text{grad}(v) < m - 1$, tales que

$$W^{\alpha-2} = \begin{pmatrix} x_0 z^{m+r} & y_0 t^{m-1+u} \\ y_0 z^{m+r} & z u q_0 t^{m-1+v} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v(1,0) = 1.$$

Reemplazando en W^α y haciendo el producto explícitamente matricial, tenemos que $\text{grad}(a) = \text{grad}(c) = n$ y $\text{grad}(b) = \text{grad}(d) = n - 1$.

Del teorema anterior, podemos concluir que los grupos de los nudos de dos puentes $S(\alpha, \beta)$ siempre tienen representaciones no abelianas en $SL(2; \mathbb{C})$, cuando $\alpha > 2$.

Un interrogante que surge es: *¿Podemos extender el procedimiento anterior a nudos de tres puentes?*

Ahora, consideremos representaciones en la \mathbb{K} -álgebra cuaterniónica:

$$\mathbb{H} = \left(\frac{\mu, \nu}{\mathbb{K}} \right) = \{ \alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K} \}, \quad (11)$$

tal que $i^2 = \mu, j^2 = \nu$ y $ij = -ji$. Donde \mathbb{K} es un campo. Para más detalles, véase ⁽¹³⁾.

Tenemos que

$$\left(\frac{-1,1}{\mathbb{K}}\right) \xrightarrow{f} M(2, \mathbb{K}), i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

es un isomorfismo.

Para $A = \alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta$, sea $A^+ = \alpha$ y $A^- = i\beta + j\gamma + ij\delta$, entonces definimos $T(A)$ como $2A^+$ y $N(A)$ como $A(A^+ - A^{-1})$. No es difícil verificar que el subconjunto $U_1 = \{A \in \mathbb{H} \mid N(A) = 1\}$ es un subgrupo de \mathbb{H} y, además, tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\text{Si } \mathbb{H} = \left(\frac{-1,1}{\mathbb{C}}\right), \text{ entonces } U_1 \cong SL(2, \mathbb{C})$$

y si

$$\mathbb{H} = \left(\frac{-1,1}{\mathbb{R}}\right), \text{ entonces } U_1 \cong SL(2, \mathbb{R}).$$

Supongamos que $G = \langle a, b \mid r(a, b) \rangle$ es el grupo de un nudo de dos puentes, en este caso, $r(a, b) : aw(a, b) = w(a, b)b$, y sea $\rho : G \rightarrow U_1$ una representación, tal que $\rho(a) = A$ y $\rho(b) = B$, entonces $A^+ = B^+$.

Sea $x = A^+, y = -(A^-B^-)^+$ y $u = 1 - x^2 = -A^-A^- = -B^-B^-$. El \mathbb{K} - subespacio vectorial $Im(\rho)$ de \mathbb{H} es generado por $B = \{1, A^-, B^-, (A^-B^-)^-\}$, más aún, la representación ρ es irreducible si y sólo si \mathbb{H} es generado, como \mathbb{K} -álgebra, por $\{1, A^-, B^-, (A^-B^-)^-\}$.

Consideremos el automorfismo $\mathbb{X}_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, C \mapsto AC$ y sea $m(A)$ la matriz del automorfismo \mathbb{X}_A con respecto a la base B , entonces

$$m(A^-) = \begin{pmatrix} 0 & -u & -y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, m(B^-) = \begin{pmatrix} 0 & -y & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u \\ 1 & 0 & 0 & -y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$m((A^-B^-)^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y^2 - u^2 \\ 1 & -y & -u & 0 \\ 0 & u & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $m(A) = x\mathbb{I}_{4 \times 4} + m(A^-), m(B) = x\mathbb{I}_{4 \times 4} + m(B^-), m(A^{-1}) = x\mathbb{I}_{4 \times 4} - m(A^-)$ y $m(B^{-1}) = x\mathbb{I}_{4 \times 4} - m(B^-)$, realicemos la sustitución $a^{\pm 1}$ por $m(A^{\pm 1})$ y $b^{\pm 1}$ por $m(B^{\pm 1})$ en $r(a, b)$ y hagamos

$$\left(W_1(m(A), m(B)) - W_2(m(A), m(B)) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x, y) \\ p_2(x, y) \\ p_3(x, y) \\ p_4(x, y) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

donde $W_1(a, b) = aw(a, b)$ y $W_2(a, b) = w(a, b)b$.

Sea I_G el ideal generado por los polinomios $p_i(x, y), i = 1, 2, 3, 4$ y consideremos la variedad algebraica $\mathcal{V}(I_G)$ correspondiente a dicho ideal.

Sea $(x_0, y_0) \in I(I_G)$ y, sean A, B en $U_1 \subset \left(\frac{-1, 1}{c} \right)$, tales que $A^+ = B^+ = x_0, y_0 = -(A^-B^-)^+ y B = \{1, A^-, B^-, (A^-B^-)^-\}$ es una base. Entonces, $\rho: G \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(a) = A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(b) = B = \begin{pmatrix} \lambda & \eta \\ \xi & \varsigma \end{pmatrix}$$

es una representación, véase ⁽¹³⁾.

Por otro lado, $A = x_0 \mathbb{I}_{4 \times 4} + A^-$, con lo que

$$-y_0 = (A^-B^-)^+ = \frac{1}{2} T(A^-B^-) = \frac{1}{2} T(AB) - x_0^2.$$

Entonces $T(AB) = 2(x_0^2 - y_0)$, además, $T(A) = 2x_0 = T(B)$; luego, si $x_0^2 = 1$, tenemos representaciones parabólicas.

En ⁽¹⁰⁾ se da una familia infinita de grupos de nudos virtuales que no corresponden a grupos de nudos clásicos. Estos grupos constituyen una subfamilia de los llamados grupos de Baumslag-Solitar. En ese artículo probamos que los grupos $BS(n, n + 1) = \langle x, y \mid xy^n x^{-1} = y^{n+1} \rangle$ corresponden a grupos de nudos virtuales de dos puentes y tienen la siguiente presentación:

$$BS(n, n + 1) = \langle y_1, y_2 \mid (y_2^{-1} y_1)^{-n} y_1 (y_2^{-1} y_1)^n = y_2 \rangle.$$

Con las técnicas anteriores, podemos calcular los polinomios $p_1(x, y), \dots, p_4(x, y)$ para el caso del grupo $BS(n, n + 1)$ y considerar la variedad algebraica:

$$\mathcal{V}(p_1(x, y), \dots, p_4(x, y)).$$

Pero, en este caso $\mathcal{V}(p_1(x, y), \dots, p_4(x, y)) = \emptyset$. La prueba de este hecho se sale de los objetivos de este artículo. Por tal motivo, la omitimos.

3.3 Construcción de nudos combinatorios a partir de $\Pi(K_{\alpha, \beta})$

Dado un grupo con presentación $\langle x, y : xw = wy \rangle$, donde w es una palabra en el grupo libre de dos generadores $F = \langle x, y \mid \rangle$, encontramos una galería de nudos combinatorios de 2 puentes K , tales que $\Pi(K) \cong \langle x, y : xw = wy \rangle$.

Teorema 3.21 Sea $G(w)$ un grupo no cíclico con presentación:

$$G(w) = \langle x, y : xw = wy \rangle, w = x^{n_1}y^{n_2} \dots x^{n_{t-1}}y^{n_t}, t = 2m.$$

Entonces, existe K ; un nudo combinatorio de 2 puentes, tal que $\Pi(K)$ es isomorfo a $G(w)$.

Demostración. Si $w_1 = x^{n_1}y^{n_2} \dots x^{n_{t-1}}y^{n_t}$, entonces

$$G(w) \cong \langle x, y : w_1^{-1} x w_1 y^{-1} = w_2^{-1} y w_2 x^{-1} = 1 \rangle,$$

donde $w_2 = y^{-n_t}x^{-n_{t-1}} \dots y^{-n_2}x^{-n_1}$.

Para simplificar la prueba, sea $u_j = -n_{t-j+1}, j = 1, 2, \dots, t$, entonces

$$w_2 = y^{u_1} x^{u_2} \dots y^{u_{t-1}} x^{u_t}.$$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A_0 = \{1, 2, \dots, |n_1|\},$$

$$B_1 = \{|n_1| + 1, \dots, |n_1| + |n_2|\},$$

$$A_1 = \{|n_1| + |n_2| + 1, \dots, |n_1| + |n_2| + |n_3|\},$$

$$B_2 = \{|n_1| + |n_2| + |n_3| + 1, \dots, |n_1| + |n_2| + |n_3| + |n_4|\},$$

⋮
⋮
⋮

$$A_i = \left\{ \sum_{j=1}^{2i} |n_j| + 1, \dots, \sum_{j=1}^{2i+1} |n_j| \right\},$$

$$B_{i+1} = \left\{ \sum_{j=1}^{2i+1} |n_j| + 1, \dots, \sum_{j=1}^{2i+2} |n_j| \right\},$$

⋮
⋮
⋮

$$A_{m-1} = \left\{ \sum_{j=1}^{t-2} |n_j| + 1, \dots, \sum_{j=1}^{t-1} |n_j| \right\},$$

$$B_m = \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} |n_j| + 1, \dots, a \right\},$$

Sea $a = \sum_{j=1}^t |n_j|$. Entonces, los conjuntos definidos anteriormente son disjuntos y su unión es $\{1, 2, \dots, 2a\}$. Además, $|A_0| = |n_1|, |A_i| = |n_{2i+1}|, i = 1, 2, \dots, m - 1,$

$$|B_i| = |n_{2i}|, i = 1, 2, \dots, m, |\bar{A}_i| = |u_{2i}|, i = 1, 2, \dots, m, |\bar{B}_0| = |u_1|, |\bar{B}_i| = |u_{2i+1}|, i = 1, 2, \dots, m - 1 \text{ y}$$

$$A_0 \cup (\cup A_i) \cup (\cup B_i) = \{1, 2, \dots, a\} \text{ y } (\cup \bar{A}_i) \cup (\bar{B}_0 \cup (\cup \bar{B}_i)) = \{a + 1, \dots, 2a\}.$$

Para $k \in \{1, 2, \dots, a\}$ definimos $e_k = sig(n_1)$ si $k \in A_0$, $e_k = sig(n_{2j+1})$ si $k \in A_j$ o $e_k = sig(n_{2j})$ si $k \in B_j$. Sean $A = A_0 \cup (\cup A_i) \cup (\cup \bar{A}_i)$ y $B = (\cup B_i) \cup (\bar{B}_0 \cup (\cup \bar{B}_i))$.

Consideremos las sucesiones A_σ y B_τ obtenidas, respectivamente, al dotar a los conjuntos A y B de un orden específico y despojarlos de su estructura de conjuntos. Entonces, podemos definir el siguiente nudo combinatorio:

$$K = ((A_\sigma, -1, -2, \dots, -a, B_\tau, -(a + 1), -(a + 2), \dots, -2a), (e_1, \dots, e_a, -e_a, \dots, -e_1)).$$

Probemos que $\Pi(K) \cong G(w)$. En efecto, denotemos los puentes de K por $x = \{-2a, A, -1\}$ y $y = \{-a, B, -(a + 1)\}$. Por teorema visto

$$\Pi(K) \equiv \langle x, y : g_1^{-1} x g_2 y^{-1} = g_2^{-1} y g_2 x^{-1} = 1 \rangle, \text{ donde } g_1, g_2 \in F[\{x, y\}].$$

Encontremos a g_1 y g_2 de forma explícita. Por definición,

$$g_1 = (x^{e_1} \dots x^{e_1}) (y^{e_2} \dots y^{e_2}) \dots (x^{e_{t-1}} \dots x^{e_{t-1}}) (y^{e_t} \dots y^{e_t}) \\ = x^{n_1} y^{n_2} \dots x^{n_{t-1}} x^{n_t} = w_1$$

De forma similar se prueba que $g_2 = w_2$. Puesto que Π no es un grupo cíclico, entonces K es de dos puentes.

Observación 3.22 *Al nudo combinatorio encontrado en la prueba anterior lo denotamos por $K_{\sigma, \tau}$. No es difícil probar que por cada orden A_λ, B_δ que le demos a los conjuntos A y B , respectivamente, obtengamos un nudo combinatorio $K_{\lambda, \delta}$ tal que $\Pi(K_{\lambda, \delta}) = G(w)$.*

Para un grupo de la forma $G(w)$ dado, al conjunto de todos los nudos combinatorios de la forma $K_{\lambda, \delta}$ tal que $\Pi(K_{\lambda, \delta}) = G(w)$ lo denotamos $K_G(w)$.

Corolario 3.23 *Si $K \in K_G(w)$, entonces K no es clásico y por tanto no trivial.*

Demostración. Computemos la longitud de K . Por definición $l(K) = w_1 w_2 x^{-p}$, donde $p = \sum_{i=1}^a e_i + \sum_{i=1}^a -e_i = 0$, con lo que $l(K) = w_1 w_2$, puesto que $w_1 = w$ y $w_2 = w^{-1}$, entonces $l(K) = 1$. Como K no es trivial, ya que Π no es cíclico, entonces K no puede ser clásico.

Sean

$$A = \{j \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\} : j \text{ es par}\} \cup \{j \in \{\alpha, \alpha + 1, \dots, 2\alpha - 2\} : j \text{ es impar}\} \text{ y}$$

$$B = \{j \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\} : j \text{ es impar}\} \cup \{j \in \{\alpha, \alpha + 1, \dots, 2\alpha - 2\} : j \text{ es par}\}$$

conjuntos ordenados, entonces, cualquier otro orden para ellos está determinado por permutaciones $\sigma : A \rightarrow A$ y $\lambda : B \rightarrow B$.

Sea $K^{\sigma, \lambda}$ el nudo combinatorio

$$((A_\sigma, -1, \dots, -(\alpha - 1), B_\lambda, -\alpha, \dots, -(2\alpha - 2)), (e_1, e_2, \dots, e_{\alpha-1}, e_1, e_2, \dots, e_{\alpha-1})),$$

entonces $\Pi(K^{\sigma, \lambda}) \cong \Pi(K_{\alpha, \beta})$.

Denotemos la colección de estos nudos combinatorios por $K^{\alpha, \beta}$. Es claro que, para todo α, β , $K_{\alpha, \beta} \in K^{\alpha, \beta}$.

Teorema 3.24 Para todo α y β , y $\sigma : A \rightarrow A$ y $\lambda : B \rightarrow B$ permutaciones, el nudo combinatorio

$$((A_\sigma, -1, \dots, -(\alpha - 1), B_\lambda, -\alpha, \dots, -(2\alpha - 2)), (e_1, \dots, e_{\alpha-1}, -e_1, \dots, -e_{\alpha-1})),$$

satisface:

- (1) Tiene grupo isomorfo a $\Pi(K_{\alpha, \beta})$ y
- (2) Tiene longitud trivial, por tanto, no es clásica.

4 Conclusiones y trabajo futuro

Sabemos que hay una biyección entre clases de equivalencia de duplas de la forma (α, β) , donde α y β son números enteros positivos que satisfacen las condiciones excepcionales dadas en la sección anterior y nudos de dos puentes.

Consideremos la fracción continua ⁽¹⁴⁾ asociada a la dupla (α, β) .

$$\alpha / \beta = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{\dots a_2 + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}} \tag{14}$$

A partir de los enteros a_1, \dots, a_n definimos el diagrama $C[a_1, a_2, \dots, a_n]$ mostrado en la Figura 16.

Donde los rectángulos son representaciones abstractas de sucesiones finitas d cruces de acuerdo con la notación dada en la Figura 17.

Estos diagramas fueron llamados por J. Conway ⁽⁹⁾ diagramas de *nudos racionales*: pues estos se obtuvieron del numerador de tangles racionales, véase ^(9,33), entre otros.

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrado que relaciona los nudos racionales con los de dos puentes.

Ejemplo 4.1 *Un diagrama orientado para el nudo racional $K = C [2, 2, 1]$ se muestra en la Figura 18. Una presentación para el grupo de este nudo está dada por*

$$\Pi(K) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \rangle,$$

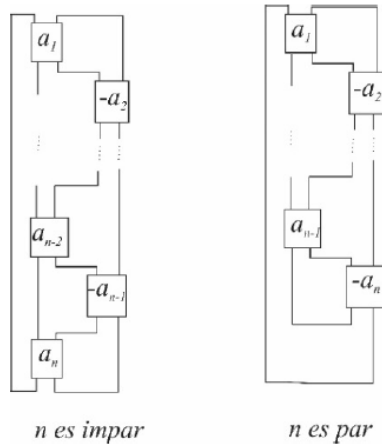


Figura 16. Diagrama esquemático de un nudo racional $C [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

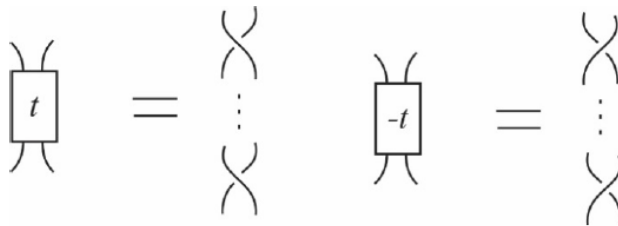


Figura 17. Tangles racionales básicos.

Donde

$$r_1 = x_1 x_3 x_1^{-1} x_4^{-1}, \tag{15}$$

$$r_2 = x_4 x_1 x_4^{-1} x_2^{-1}, \tag{16}$$

$$r_3 = x_3 x_4 x_3^{-1} x_5^{-1}, \tag{17}$$

$$r_4 = x_5 x_2 x_5^{-1} x_3^{-1} y \tag{18}$$

$$r_5 = x_2 x_5 x_2^{-1} x_1^{-1}. \tag{19}$$

De r_1 tenemos que $x_4 = x_1 x_3 x_1^{-1}$. Reemplazando esta última igualdad en r_2 obtenemos que $x_2 = x_1 x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1}$. Por tanto $r_5 = x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}$ y así

$$x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} = 1.$$

Por último, de r_5 tenemos

$$x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} = 1.$$

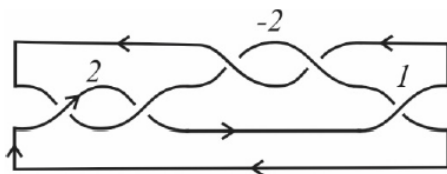


Figura 18. $C[2, 2, 1]$.

Si hacemos $w_1 = x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3$ y $w_2 = x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1$, entonces hemos probado que $\Pi(K)$ es isomorfo a

$$\langle x_1, x_3 \mid x_1 w_2 = w_2 x_3, x_3 w_1 = w_1 x_1 \rangle. \tag{20}$$

Por otro lado,

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{3}.$$

Consideremos el diagrama $S(7,3)$ dado en la Figura 19. El grupo de este nudo tiene la presentación dada en (20), por tanto $C[2, 2, 1]$ es un nudo de dos puentes.

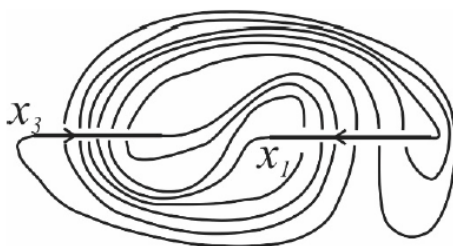


Figura 19. Diagrama de $S(7,3)$.

Sería muy interesante tener una prueba de que los grupos fundamentales $\Pi(S(\alpha; \beta))$ y $\Pi(C[a_1, \dots, a_n])$ sean isomorfos. Este resultado y el hecho de que el grupo de un nudo clasifique los nudos primos probarían que los nudos racionales y los de dos puentes constituyen la misma familia. Una prueba de esta última afirmación puede ser consultada en ⁽³⁴⁾.

Para el caso de los nudos de tres puentes el problema es más sutil. A estos no se les ha podido asociar una dupla, pero sí una séxtupla ordenada utilizando el concepto de mariposa. Este estudio está fuera de los objetivos de este artículo. Si el lector está interesado en los detalles, véase ⁽¹⁷⁾.

Referencias bibliográficas

1. Alexander JW. Note on Riemann spaces. *Bull Am Math Soc.* 1920; 26: 370-372.
2. Thompson WT. *Mathematical and physical papers, III.* Cambridge: Cambridge U. Press; 1890.
3. Sumners W. Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes. *Notices of the American Mathematical Society.* 1995; 42(5):528-537.
4. Sumners DWL. DNA Topology: Experiments and Analysis. In: Kawauchi A. ed. *Knot Theory for Scientific Objects, Proceedings of the International Workshop on Knot Theory for Scientific Objects, OCAMI Studies.* 2007; 1(2): 213-237.
5. Kauffman L. *Knots Theory and Physics.* World Scientific: Singapore; 1991.
6. Reidemeister K. *Knotentheorie (reprint).* Springer-Verlag: Berlin-New York; 1974.
7. Toro MM. *Programación en Mathematica con aplicaciones a la Teoría de Nudos.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá; 2004.
8. Kauffman L. Virtual Knot theory. *Europ J Combinatorics.* 1999; 20: 663-691. <http://homepages.math.uic.edu/~kauffman/VKT.pdf>.
9. Conway J. An Enumeration of Knots and Links, and Some of their Algebraic Properties Computational problems in Algebra. Conference on Computational Problems in Abstract Algebra. Algebraic Proc. Oxfor; UK, 29 Aug - 2 Sep 1967, pp.329-358
10. Mira JJ, Rodríguez JG, Salazar OP. Some Baumslag-Solitar Groups are the Groups of Two Bridge Virtual Knots. 2015. <http://arxiv.org/pdf/1511.03389.pdf>.
11. Rodríguez J, Toro M. Virtual Knot Groups and Combinatorial Knots, *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences.* 2009; 3(1): 297-314.
12. Riley R. Parabolic representations of knot groups, *Proc. London Math. Soc.* 1972; 3(24): 217-242.
13. Hilden H, Lozano MT, Montesinos AJM. On representations of 2-bridge knot groups in quaternion algebras. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications.* 2010; 1(1): DOI: 10.1142/S0218216511009224
14. Toro MM. Nudos Combinatorios y Mariposas. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 2004; 28(106): 79-86.

15. Rodríguez JG. Nudos Virtuales, Tesis de Doctorado en Matemáticas, Universidad Nacional, Medellín; 2011.
16. Schubert H. Knoten mit zwei Bracken. *Math Z.* 1956; 65: 133-170.
17. Hilden H, Montesinos J, Tejada D, Toro M. On the Classification of 3-Bridge Links. *Rev Col Mat.* 2012; 46(2): 113-144.
18. Burde G, Zieschang H. *Knots*. Walter de Gruyter: New York; 1985.
19. Crowell R, Fox R. *Introduction to Knot Theory*. Blaisdell Publishing Company: New York; 1963.
20. Haken W. Theorie der Normalflächen, ein isotopiekriterium für den Kreisknoten, *Acta Math.* 1961; 105: 245-375.
21. Hass J, Lagarias JC, Pippenger N. The Computational Complexity of Knot and Link Problems. <http://arxiv.org/pdf/math/9807016v1.pdf>. 2008.
22. González AF, Montesinos AJM. On the Character Variety of Groups Representations in $SL(2, \mathbb{C})$ and $PSL(2, \mathbb{C})$. *Math Z.* 1993; 214: 627-652.
23. Waldhausen F. On Irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann of Math.* 1968; 87: 56-88.
24. Hempel J. *3-Manifolds*. Annals of Math Studies 86. Princeton University Press; 1976.
25. Salazar OP. El grupo de un nudo. Tesis en matemáticas. Universidad Nacional de Colombia; 1996.
26. Toro M, Rodríguez J. Tripletas asociadas a diagramas de nudos virtuales. *Revista Integración*. 2011; 29(2): 97-108.
27. Henrich A. A Sequence of Degree one Vassiliev Invariants for Virtual Knots. *J Knot Theory Ramifications*. 2010; 19(4): 461-487.
28. Carter S, Kamada S, Saito M. Stable Equivalence of Knots on surfaces and Virtual Knots Cobordism, *J Knot Theory Ramifications*. 2002; 11(6): 311-320.
29. Kamada N, Kamada S. Abstract Links Diagrams and Virtual Knots. *J Knot Theory Ramifications*. 2000; 9(1): 93-106.
30. Toro M, Rodríguez J. Un Invariante de Nudos Virtuales Preprint. 2013.
31. Hardy GH, Wright EM, *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, Ely House: London; 1975.
32. Pomerence C, Toro M. On the Two-Parabolic Subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$. *Rev Colomb Mat.* 2011; 45(1): 37-50.

33. Kauffman LH, Lambropoulou D. On the classification of rational knots. *L'Enseignement Mathématique*. 2003; 49: 357-410.
34. Toro MM. Equivalence of rational links and 2-bridge links revisited. *Knot Theory Ramifications*. 2015; 24: 1550015.

Dirección de los autores

Jhon Jader Mira Albanés

Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín-Colombia
jjmira@unal.edu.co

José Gregorio Rodríguez Nieto

Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín-Colombia
jgrodrig@unal.edu.co

Olga Patricia Salazar Díaz

Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín-Colombia
opsalazard@unal.edu.co