Sobre algunas caracterizaciones del cuerpo ordenado de los Números Reales

José Manuel Reyes Andrés
Independiente

Recibido: 28-02-2025
Aceptado: 03-09-2025

ORCID José Manuel Reyes Andrés
0009–0007–8922–1705

Resumen

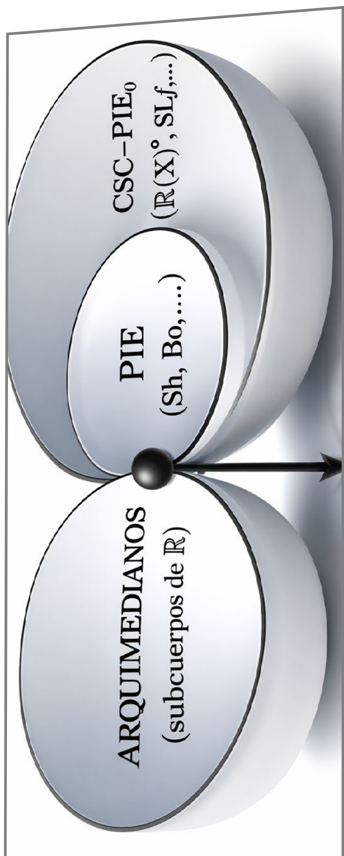
El objetivo principal de este trabajo es presentar una demostración original de algunas caracterizaciones del cuerpo ordenado de los números reales. Nos centraremos en las que involucran el Axioma del Supremo, el Principio de los Intervalos Encajados y la Convergencia de Sucesiones de Cauchy. Una peculiaridad de este trabajo es que abundan los enunciados de equivalencias. De hecho, muchos de estos enunciados, como cadenas de equivalencias, son la propia demostración. Además, el trabajo nos proporciona otra forma de ver la equivalencia entre las construcciones de los números reales de Dedekind y de Cantor.

Palabras clave: axioma del supremo, caracterización de los números reales, sucesiones de Cauchy, principio de los intervalos encajados.

On some characterizations of the ordered field of the Real Numbers

Abstract

The main objective of this paper is to present an original proof of some characterisations of the ordered field of the real numbers. We will focus on those involving the Supreme Axiom, the Nested Interval Principle, and the Cauchy Convergence of Successions. A peculiarity of work is that equivalence statements abound. In fact, many of these statements, as chains of equivalences, are the demonstration itself. In addition, the work provides another way of seeing the equivalence between the constructions of the real numbers of Dedekind and Cantor.



Citación sugerida:
Reyes-Andrés, J. M. (2025). Sobre algunas caracterizaciones del cuerpo ordenado de los Números Reales. Revista de Ciencias, 28(1): e20214777. https://doi.org/10.25100/rc.v28i1.14777

1 Introducción

En las escuelas enseñan el método que ideó Arquímedes para aproximar el número π calculando los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia de radio dado. Se explica, quizás con otras palabras, que la sucesión de polígonos determina una sucesión de intervalos encajados que limitan el número buscado y cuyas longitudes tienden a cero por lo que, conforme el número de lados aumenta, la aproximación calculada estará cada vez más cerca del valor real.

Esta idea de aproximar números con intervalos encajados y cuyas longitudes tienden a cero se puede ver en el intento de Bolzano, a principios del siglo XIX, de construir números irracionales con intervalos de números racionales[1]. Nos encontramos que a mediados del siglo XIX ya se había formalizado el cálculo infinitesimal pero aún no se conocía una fundamentación del concepto de número real. Dedekind ya mostró interés por la fundamentación de los números reales en su lección de habilitación de 1854, y desarrolló su construcción mediante cortaduras en 1858, publicándola finalmente en 1872. Su método es la forma natural de extender un conjunto linealmente ordenado a otro que cumpla el axioma del supremo. Pero conseguir mantener la estructura de cuerpo resulta tedioso.

También en 1872, Cantor publicó su método basado en sucesiones de Cauchy que, a su vez, es la forma natural de extender un cuerpo a otro en el que las sucesiones de Cauchy sean convergentes. Aunque su artículo no tenía el rigor del de Dedekind, su construcción es la más utilizada. Además de ser menos engorrosa, es probablemente más útil para el análisis. Se considera que Cantor mejoró la construcción del que fuera su profesor, Weierstrass, basada en series o *agregados* de racionales[2].

Es bien conocido que estas construcciones son equivalentes, es decir, construyen cuerpos ordenados isomorfos. En este trabajo damos otra forma de mostrar la equivalencia de las dos construcciones usando como eslabón las sucesiones de intervalos encajados. Concretamente, la parte central del artículo es presentar una demostración original del siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Dado un cuerpo ordenado F, son equivalentes:*

i) F es isomorfo al cuerpo ordenado de los números reales.

ii) En F todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.

iii) F es arquimediano y cumple el Principio de los Intervalos Encajados.

iv) F es arquimediano y toda sucesión de Cauchy es convergente.

En la sección 2 demostraremos que los cuerpos ordenados que cumplen el axioma del supremo son isomorfos, es decir la unicidad. Lo haremos utilizando las ideas de Dedekind. Concretamente, veremos que son isomorfos al completado por cortaduras del cuerpo de los números racionales. La particularidad de nuestra demostración es que mostramos como, para probar la unicidad, podemos evitar realizar las habituales y tediosas definiciones de las

[1] Puede consultar sus ideas en el trabajo de Russ *et al.* (1).

[2] Aunque Weierstrass nunca publicó su método, se conoce por las notas de algunos de sus alumnos. La construcción de Weierstrass presenta algunas dificultades (2).

operaciones suma y producto de cortaduras, y las no menos engorrosas demostraciones de las propiedades preceptivas. Además, nos permite obtener la caracterización de Hilbert.

En la sección 3 veremos la equivalencia de la condición iii con la ii y la iv.

Con respecto al Principio de los Intervalos Encajados (PIE) hay que realizar la siguiente precisión. La forma habitual de decirlo es: *Un conjunto totalmente ordenado cumple el PIE si toda sucesión de intervalos acotados, cerrados y encajados tiene intersección no vacía*. Sin embargo, en ocasiones, especialmente cuando se estudia las propiedades de los números reales, se complementa con la siguiente condición que vamos a denotar PIE_0: *Un cuerpo ordenado cumple el* PIE_0 *si toda sucesión de intervalos cerrados y encajados cuyas longitudes tienden a cero tiene por intersección un único elemento*. En esta sección empezaremos viendo que en cuerpos ordenados el PIE siempre implica el PIE_0. También probaremos que en los cuerpos arquimedianos se verifican el recíproco. (En cuanto a los cuerpos no arquimedianos, veremos ejemplos que muestran que el PIE y el PIE_0 no son equivalentes). A continuación, mostraremos que en los cuerpos arquimedianos estos principios son equivalentes al axioma del supremo. En el último apartado de la sección demostraremos que en los cuerpos ordenados, arquimedianos o no, el PIE_0 es equivalente a la Convergencia de las Sucesiones de Cauchy (CSC).

En definitiva, las implicaciones que veremos se pueden representar con el diagrama que presentamos en la figura 1.

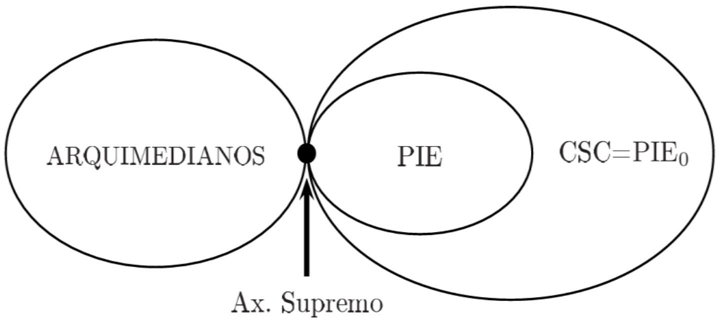


Figura 1. Relaciones en los cuerpos ordenados entre el PIE, la CSC, la propiedad arquimediana y el axioma del supremo.

Hemos tratado, aunque no del todo conseguido, que la demostración de estas equivalencias sea a través de cadenas de equivalencias. A nuestro juicio, esto proporciona una mejor visión del fondo del asunto, del por qué decimos lo mismo con distintas palabras. Esta forma de proceder en estas dos secciones, nos llevan a enunciar definiciones equivalentes de conceptos como supremo, propiedad arquimediana y el PIE, y nos sirve para demostrar, de paso, otras conocidas caracterizaciones del cuerpo ordenado de los números reales.

En la sección 4 indicamos cómo es la construcción de Cantor de los números reales. Esta construcción nos proporciona la existencia de un cuerpo que cumple con todas estas propiedades. Seguidamente recapitularemos las definiciones equivalentes de $\mathbb{R}$ que hemos encontrado en el artículo. Terminaremos la sección viendo las propiedades del cuerpo que resulta de aplicar el método de Cantor al cuerpo de las funciones racionales.

Por último, comentar que, como se puede apreciar en la introducción, evitamos la denominación de *cuerpo completo* por ser ambigua. En efecto, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos es habitual denominar *completo* a los conjuntos totalmente ordenados que cumplan el axioma del supremo. En este sentido, cuerpo completo solamente hay uno, el de los números reales. Sin embargo, en otros campos es habitual utilizar el término *completo* para referirse a conjuntos métricos, o con una topología con base uniforme, que cumplen la CSC. En todo caso, para evitar la ambigüedad, utilizaremos los términos *Dedekind-completo* y *Cauchy-completo*.

2. El axioma del supremo y la propiedad arquimediana

En esta sección mostramos unas caracterizaciones del *supremo* de un conjunto que utilizaremos más adelante. También veremos las relaciones de los cuerpos arquimedianos y los cuerpos que cumplen el axioma del supremo con el denominado *completado por cortaduras* de $\mathbb{Q}$, que no es otro que $\mathbb{R}$. En concreto, veremos que los cuerpos que cumplen el axioma del supremo son isomorfos a él, y que los los arquimedianos están contenidos en él.

2.1 Axioma del supremo

Como sabemos, un conjunto totalmente ordenado S se dice que satisface el *Axioma del Supremo* si cualquier subconjunto acotado C tiene supremo, es decir, existe un elemento en S que es la menor cota de C. En este apartado vamos a ver otras definiciones equivalentes de supremo. Antes veamos algunos aspectos de notación.

Dados dos subconjuntos C_1 y C_2 con la expresión $C_1 \leq C_2$ expresamos el hecho de que todos los elementos del primero son menores o iguales que cualquier elemento del segundo. Análogo significado le damos a $C_1 < C_2$.

Dado un subconjunto C acotado superiormente (inferiormente) denotaremos por $U(C)$ ($L(C)$) al conjunto de todas sus cotas superiores (inferiores). Enunciemos unas propiedades elementales de estos conjuntos.

Proposición 2.1. *En un conjunto totalmente ordenado S, dado un subconjunto C acotado superiormente (inferiormente) se cumple que:*

1. $U(C) \cup L(U(C)) = S \quad (L(C) \cup U(L(C)) = S)$.

2. $C \leq U(C) \quad (L(C) \leq C)$.

3. *Si* $C \subseteq X$ *entonces* $U(X) \subseteq U(C) \quad (L(X) \subseteq L(C))$.

4. $C \subseteq L(U(C)) \quad (C \subseteq U(L(C)))$.

5. $U(C) = U(\mathrm{L}(U(C))) \quad (L(C) = L(U(L(C))))$.

Demostración. Solamente nos detendremos en la demostración de la propiedad 5. Si C está acotado superiormente entonces $U(C)$ lo está inferiormente. Aplicando la propiedad 4 se deduce que $U(C) \subseteq U(L(U(C)))$. Por otra parte, por la propiedad 4 sabemos que $C \subseteq L(U(C))$ y aplicando la propiedad 3 obtenemos $U(L(U(C))) \subseteq U(C)$.

La siguiente proposición se deduce directamente de las definiciones de supremo e ínfimo y de la propiedad 5.

Proposición 2.2. *Dado un conjunto totalmente ordenado S, y un subconjunto acotado superiormente C, son equivalentes:*

i) α *es supremo de C.*

ii) $\alpha \geq C$ *y* $\alpha \leq U(C)$. *Es decir,* α *es el mínimo de* $U(C)$.

iii) $\alpha \in U(C) \cap L(U(C))$.

iv) $\alpha \in U(L(U(C))) \cap L(U(C))$.

v) $\alpha \geq L(U(C))$ *y* $\alpha \leq U(C)$. *Es decir,* α *es el máximo de* $L(U(C))$.

vi) α *es ínfimo de* $U(C)$.

Hagamos un par de comentarios. En primer lugar, hemos visto que α es el ínfimo de $U(C)$ si y solamente si α es el mínimo $U(C)$. Es decir, si existe el ínfimo de $U(C)$ entonces pertenece a $U(C)$. Por otra parte, análogo resultado se deduce en caso de conjuntos acotados inferiormente.

Merece la pena hacer una pequeña digresión.

Teorema 2.1. *Dado un conjunto totalmente ordenado S, son equivalentes:*

i) Todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.

ii) Todo subconjunto acotado inferiormente tiene ínfimo.

Demostración. Si todo conjunto acotado inferiormente tiene ínfimo tendremos que para todo conjunto acotado superiormente C existirá el ínfimo de $U(C)$. Entonces, por la proposición 2.2, existirá el supremo de C. Simétricamente obtenemos la implicación contraria.

Condición equivalente, en cuerpos ordenados, de supremo de una sucesión creciente. Notemos que hasta ahora solo hemos hablado de conjuntos ordenados. En la siguiente proposición damos, para cuerpos ordenados, unas sencillas condiciones equivalentes de supremo de una sucesión creciente. En el apartado siguiente haremos uso de la última, las intermedias son la demostración.

Proposición 2.3. *En un cuerpo ordenado, dada una sucesión creciente y acotada* $\{a_n\}$, *son equivalentes:*

i) α *es su supremo de* $\{a_n\}$.

ii) α *es cota superior de* $\{a_n\}$ *y para todo* $\epsilon > 0$ *se tiene que* $\alpha - \epsilon$ *no lo es.*

iii) α *es cota superior de* $\{a_n\}$ *y para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon)$ *tal que* $\alpha - \epsilon < a_{n(\epsilon)}$.

iv) Para todo $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon)$ tal que $\{a_n\} \leq \alpha < a_{n(\epsilon)} + \epsilon$.

2.2 Propiedad arquimediana

Sabemos[3] que un anillo (cuerpo) ordenado F contiene una copia de $\mathbb{Z}(\mathbb{Q})$[4]. Un caso particularmente importante es cuando $\mathbb{Z}$ no está acotado, son los denominados *anillos* (*cuerpos*) *arquimedianos*.

Definición 2.1. *Sea R un anillo (o un cuerpo) ordenado, se dice que R es arquimediano si $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente.*

Un ejemplo de anillo no arquimediano es el anillo de los polinomios sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$. Por supuesto, su cuerpo cociente, el cuerpo de las funciones racionales sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(X)$, tampoco es arquimediano.

En este apartado vamos a dar unas definiciones equivalentes de la propiedad arquimediana[5]. También veremos un par de resultados importantes que se deducen de las últimas caracterizaciones.

Proposición 2.4. *Sea F un cuerpo ordenado. Entonces, las siguientes definiciones de la propiedad arquimediana son equivalentes:*

i) $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente en F.

ii) Para todo $x \in F$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

iii) La sucesión $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ no está acotada superiormente.

iv) $\inf\{1/n, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

v) $\inf\{1/2^n, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

vi) Para todo $\epsilon > 0$ la sucesión $\{\sum^n \epsilon\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.

---

[3] Las propiedades algebraicas básicas de los cuerpos ordenados se pueden consultar en el capítulo 11 de Waerdem [(3)] o en el capítulo 1 de Artmann [(4)]. Brevemente, recordemos que si son ordenados entonces la relación de orden es total. Además, definir una relación de orden en ellos es equivalente a definir el conjunto de elementos positivos P, de manera que si $x, y \in P$ entonces $x + y$ y $xy \in P$. Así, se dice que $x < y$ si $y - x \in P$. Por ejemplo, en el anillo de los polinomios se definen los polinomios positivos como aquellos cuyo coeficiente del término de mayor orden es positivo. Para el cuerpo de las funciones racionales, como cuerpo cociente, el orden se extiende de forma natural.

[4] Por simplicidad, supondremos que para todo cuerpo ordenado F tenemos que $\mathbb{Q} \subset F$, en lugar de hablar de subcuerpos isomorfos a $\mathbb{Q}$.

[5] No vamos a hacer una enumeración exhaustiva de las definiciones equivalentes de cuerpo arquimediano, ni siquiera de las que pueden considerarse más habituales. Solamente enunciamos las que utilizamos en el trabajo ya sea directamente, ya sea como paso intermedio para enunciar otras. Las de la primera proposición son bien conocidas, pero no descartamos que alguna de las siguientes sea original. Aún veremos otras caracterizaciones en otros apartados.

vii) Para todo $a \in F$ y para todo $\epsilon > 0$ la sucesión $\{a + \sum^n \epsilon\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.

viii) Para todos $a < b \in F$ y para todo $\epsilon > 0$ existe n tal que $a + n\epsilon > b$.

ix) $\mathbb{Q}$ es denso[6] en F.

Demostración. Que i implica ii se deduce porque para todo x debe existir n_i y n_s tales que $-x \leq -n_i$ y $-x < n_s$. Por tanto, $n_i \leq x < n_s$ y si no es $x < n_i + 1$ consideremos el siguiente a n_i. Procedemos de forma iterativa y, como $n_s - n_i \in \mathbb{N}$, en un número finito de pasos encontramos el valor requerido. El recíproco es trivial.

Para la tercera tengamos en cuenta que $n < 2^n$ y que $2^n \in \mathbb{Z}$.

Las iv y v se deducen de que si C es un conjunto de elementos positivos se tiene que $C^{-1} = \{x^{-1} : x \in C\}$ también lo es y, por tanto, su ínfimo será mayor o igual que 0 y la igualdad se da si y solamente si C no está acotado.

Para justificar vi y vii solamente hay que tener en cuenta que un conjunto C está acotado superiormente si y solamente si para todo $a > 0$ se tiene que $aC := \{ax : x \in C\}$ está acotado superiormente; o si y solamente si para todo a se tiene que $a + C := \{a + x : x \in C\}$ está acotado superiormente.

La viii no es más que otra forma que expresar la vii.

En cuanto a la última, si $\mathbb{Q}$ es denso en F entonces, como F no tiene elemento máximo, $\mathbb{Q}$ no está acotado y, por tanto, tampoco lo está $\mathbb{Z}$. Para el recíproco, sean $x < y \in F$, por iv existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < y - x$, y por ii existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m - 1 \leq nx < m$. Así, tenemos que $x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + y - x = y$.

Presentamos separadamente otra condición equivalente que nos va a ser de gran utilidad. La demostración que hemos elaborado es una cadena de equivalencias que parte de la condición vii de la proposición 2.4. Para las primeras equivalencias nos podemos ayudar de la figura 2.

Proposición 2.5. *Sea F un cuerpo ordenado. Entonces, las siguientes definiciones de la propiedad arquimediana son equivalentes:*

i) Para todo a y para todo $\epsilon > 0$ la sucesión $\{a + \sum^n \epsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.

ii) Para todo a y para toda sucesión $\{\mu_n\}$ tal que $\{\mu_n\} \geq \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$, se tiene que la sucesión $\{a + \sum^n \mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada.

[6] Recordemos que un conjunto totalmente ordenado S es denso si $\forall\ x < y \in S$ existe $z \in S$ tal que $x < z < y$. Y un subconjunto suyo A es denso en S si $\forall\ x < y \in S$ existe $z \in A$ tal que $x < z < y$.

iii) Para toda sucesión $\{a_n\}$ *tal que para todo n se verifica que* $a_{n+1} - a_n \geq \epsilon$ *para cierto* $\epsilon > 0$*, se tiene que la sucesión* $\{a_n\}$ *no está acotada.*

iv) Para toda sucesión creciente $\{a_n\}$ *tal que para todo n existe* $m(n) > n$ *que verifica que* $a_{m(n)} - a_n \geq \epsilon$ *para cierto* $\epsilon > 0$*, se tiene que la sucesión* $\{a_n\}$ *no está acotada*[7]*.*

v) Para toda sucesión creciente y acotada $\{a_n\}$*, y para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon)$ *tal que para todo* $m \geq n(\epsilon)$ *se tiene que* $a_m - a_{n(\epsilon)} < \epsilon$*.*

vi) Para toda sucesión creciente y acotada $\{a_n\}$*, y para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon)$ *tal que* $\{a_n\} < a_{n(\epsilon)} + \epsilon$*.*

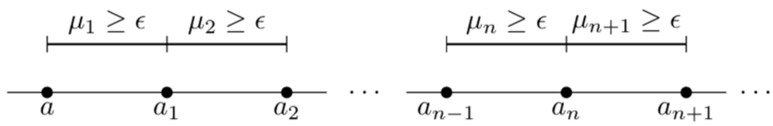


Figura 2. Representación de una sucesión creciente cuyos elementos están separados, al menos, por un valor $\epsilon > 0$.

Volvemos a comentar que nada impide obtener caracterizaciones análogas si hablamos de sucesiones no acotadas inferiormente y decrecientes.

Una consecuencia inmediata de la última definición es que, por la última de las caracterizaciones de supremo de la proposición 2.3, todo cuerpo ordenado que satisface el axioma del supremo es arquimediano. Este resultado quedará obsoleto cuando veamos que solamente hay un cuerpo ordenado que cumple el axioma del supremo, el de los reales, no obstante, enunciémoslo.

Corolario 2.1. *Todo cuerpo ordenado que cumple el axioma del supremo es arquimediano.*

Hagamos de nuevo una digresión para esbozar la demostración de otra conocida caracterización del cuerpo de los números reales.

Aunque aún no hemos comentado como se definen en los cuerpos ordenados el valor absoluto ni, por tanto, las sucesiones de Cauchy ni la convergencia de sucesiones, no podemos evitar comentar que de la caracterización v de la proposición 2.5 se desprende que otra caracterización de cuerpos arquimedianos es: *Aquellos cuerpos ordenados en los que toda sucesión creciente y acotada es una sucesión de Cauchy*[8]. Como hemos comentado, la caracterización se mantiene si hablamos de sucesiones monótonas y acotadas.

Observemos que entonces, si un cuerpo *F* es arquimediano y cumple la CSC cumplirá que toda sucesión monótona y acotada es convergente. Recíprocamente, si toda sucesión

[7] Esta caracterización se puede deducir de la anterior del hecho de que una sucesión es no acotada si y solamente si tiene alguna subsucesión no acotada. De hecho, si prescindimos de la condición de ser creciente la caracterización sigue siendo válida, pero la hemos incluido para obtener la caracterización siguiente como el contrarrecíproco de esta.

[8] Esta caracterización se menciona en la página 36 de Artmann (4).

monótona y acotada es convergente tenemos por un lado que $\mathbb{N}$, al formar una sucesión monótona no convergente, no puede ser acotado, es decir, F es arquimediano; y por otro que, como toda sucesión de Cauchy es acotada y admitiendo que de toda sucesión se puede extraer una subsucesión monótona, se tiene que de toda sucesión de Cauchy se puede extraer una subsucesión monótona y acotada, que, por hipótesis, será convergente, y, como se demuestra que toda sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente es convergente, concluimos que F cumple la CSC. Es decir, tenemos la siguiente equivalencia.

Corolario 2.2. *Dado un cuerpo ordenado F toda sucesión monótona y acotada es convergente si y solamente si F es arquimediano y cumple la CSC.*

2.3 El completado por cortaduras

Como iremos indicando a lo largo de este apartado, no es difícil demostrar que para todo conjunto totalmente ordenado, no acotado y denso existe un conjunto que lo contiene, cumple el axioma del supremo, mantiene el orden y aquel es denso en este (para una demostración sintética ver página 39 de Jech (5)). Lo único que hay que hacer es rellenar los huecos con las denominadas cortaduras de Dedekind[9]. En este apartado nos vamos a limitar a hablar de conjuntos ordenados sin estructura algebraica alguna, pero vamos a preparar el terreno para dar el salto a cuerpos ordenados en el apartado siguiente, donde probaremos la unicidad de cuerpos ordenados que cumplen el axioma del supremo.

No hay una completa uniformidad en las definiciones de *cortadura* y *cortadura de Dedekind*. En su origen, Dedekind (7) definió las *cortaduras*[10] utilizando pares de conjuntos (A_1, A_2) que suponían una partición de $\mathbb{Q}$ de manera que todo elemento de A_1 es menor que todo elemento de A_2. Si bien Hrbacek *et al.* (9) siguen a Dedekind diciendo que dado un conjunto ordenado S una *cortadura* es un par de subconjuntos (A, B) no vacíos cuya unión es S y $A < B$ (por tanto, son disjuntos); añaden que cuando además se cumple que A no tiene máximo se dice que es una *cortadura de Dedekind*. Notemos que A no tiene máximo si y solamente si $U(A) = B$, entonces, por la proposición 2.2, A no tiene supremo si y solamente si ni A tiene máximo ni B tiene mínimo. Se dice entonces que la cortadura es un *gap*.

Observemos que las cortaduras vienen unívocamente determinadas por uno de los conjuntos del par ya que el otro es su complementario, y, como según Suppes (10) ya notaron Peano y Russell, son más sencillos de manipular. Así, es habitual trabajar solo con el primer conjunto de cada par. Cuando estos conjuntos no tienen máximo, algunos autores, como Goldrey (11), los llaman *conjuntos izquierda de Dedekind*; otros, como Potter (12), descriptivamente llaman *subconjuntos propios iniciales sin máximo* ya que los podemos definir como todo aquel subconjunto propio A no vacío, que no tiene máximo y que cumple que si $x \in A$ entonces para todo $y < x$ se tiene que $y \in A$; y otros como Harrison (13) o Ayres (14) llaman simplemente cortaduras.

Nosotros seguiremos más bien a estos últimos en el sentido de que trabajaremos solo con el primer conjunto, pero usaremos las denominaciones de los primeros. Para mayor claridad, presentamos la siguiente definición.

Definición 2.2. *Dado un conjunto totalmente ordenado S, y A un subconjunto no vacío y acotado de S decimos que:*

[9] Como comenta Feferman (6), esta construcción es también válida para conjuntos acotados, lo que sucede es que los cuerpos ordenados no lo son, y, por tanto, no es de nuestro interés.

[10] La palabra alemana utilizada por Dedekind fue *schnitt*. En su traducción al inglés se ha impuesto el término cut y al español cortadura, como hacen los autores de los manuales que vamos a citar y Ferreirós (8) en su traducción de los trabajos de Dedekind.

- *A es una* cortadura *si* $A \cup U(A) = S$.
- *A es una* cortadura de Dedekind *si es una cortadura* y $A \cap U(A) = \emptyset$ (*o, equivalentemente, si es una cortadura sin máximo*).
- *A es un* gap *si es una cortadura de Dedekind y* $U(A)$ *no tiene mínimo* (*o, equivalentemente, si es una cortadura sin supremo*).

Por ejemplo:

- $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 2\}$ es una cortadura, pero no es Dedekind ya que tiene máximo.
- $\{q \in \mathbb{Q} : q < 2\}$ es una cortadura de Dedekind pero no es gap ya que tiene supremo.

- $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ es el ejemplo clásico de gap ya que para todo $q \in \mathbb{Q}$ siempre es posible encontrar $p \in \mathbb{Q}$ tal que si $q^2 < 2$ entonces $p^2 < 2$ y $q < p$, y si $q^2 > 2$ entonces $p^2 > 2$ y $p < q$.

Pongamos otros ejemplos que relacionan las cortaduras con sucesiones de elementos de $\mathbb{Q}$ y con series en $\mathbb{Q}$.

Supongamos una sucesión creciente y acotada $\{q_n\}$, entonces podemos definir la cortadura de Dedekind $\{q \in \mathbb{Q} : \exists\ n \text{ con } q < q_n\}$. Ejemplos de este tipo de cortaduras tenemos las que determinan las sucesiones constantes, que no serían gap. Ejemplo de gap es la cortadura que proviene de la sucesión $q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, pues se demuestra que no tiene supremo. Concretamente, esta cortadura nos define el número e.

También sería cortadura de Dedekind la definida por una sucesión a su vez definida mediante una serie de suma acotada y elementos no negativos ya que tal sucesión sería creciente y acotada. Por ejemplo, $q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$ que no sería gap por tener de supremo el 1, o $q_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ que sí sería gap ya que se demuestra que determina la misma cortadura que define el número[11] e.

En lo que sigue trabajaremos con conjuntos totalmente ordenados, no acotados, de más de un elemento y densos porque así lo son los cuerpos ordenados, pero algunos resultados se mantienen relajando las condiciones de ser acotados o densos. Dado uno de estos conjuntos, S, definimos su *completado por cortaduras*, $\bar{S}^D$, como el conjunto formado por todas sus cortaduras de Dedekind. En estos conjuntos de conjuntos la inclusión es una relación de orden total y con ella, además de conservar las propiedades de ser no acotado y denso, como hemos comentado, verifican el axioma del supremo. En efecto, el supremo de un conjunto de cortaduras es simplemente su unión. También se consideran que son una extensión del conjunto original. Justifiquemos esto último. Tengamos en cuenta que dado $a \in S$ se tiene que $\{x \in S : x < a\}$ es una cortadura de Dedekind que tiene a a por su supremo. De esta forma, podemos definir la función:

[11] Si partiendo de esta última sucesión definimos la sucesión $q'_n = q_n + 1/n!$ tenemos otra sucesión acotada, pero en este caso decreciente, que conjuntamente nos definen una sucesión de intervalos encajados cuyas longitudes tienden a cero. La intersección de todos ellos en $\mathbb{Q}$ es el vacío, pero en $\mathbb{R}$ es, evidentemente, el número e.

$$i:\begin{cases} S \longrightarrow \overline{S}^D \\ a \longmapsto i(a) = \{x \in S: \ x < a\} \end{cases}$$

y fácilmente se comprueba que si $a < b$ entonces $i(a) \subsetneq i(b)$, es decir, es inyectiva y conserva el orden (por ejemplo, ver el paso 4 del teorema 7.5 de Feferman [(6)]). En realidad, toda cortadura de Dedekind se puede escribir de esta forma si y solamente si tiene supremo. En efecto, si A es una cortadura de Dedekind que tiene supremo entonces $A = \{x \in S : x < \sup A\} = i(\sup A)$. Recapitulando, podemos dar algunas caracterizaciones de los conjuntos que verifican el axioma del supremo.

Proposición 2.6. *Sea S un conjunto totalmente ordenado, denso y no acotado. Son equivalentes:*

i) En S no hay gaps.

ii) En S toda cortadura de Dedekind tiene supremo.

iii) La función de inclusión i es biyectiva y, por tanto, un isomorfismo de conjuntos ordenados.

iv) S es isomorfo a $\bar{S}^D$.

v) S cumple el axioma del supremo.

Demostración. Ya hemos comentado que i es equivalente a ii y esta a iii. Por otra parte, por definición, iii implica iv y v implica ii. Para terminar, afirmamos que iv implica v. En efecto, en general, si dos conjuntos ordenados son isomorfos entonces o los dos o ninguno cumple el axioma del supremo (basta comprobar que el supremo de un conjunto acotado es la antiimagen del supremo del conjunto imagen[12]). Por tanto, como $\bar{S}^D$ cumple el axioma del supremo, si S es isomorfo a $\bar{S}^D$ entonces S cumple el axioma del supremo.

Por otra parte, dado C subconjunto denso en S, es evidente que si A es una cortadura de S se tiene que $A \cap C$ es una cortadura de C. Veamos que también se conservan las cortaduras de Dedekind.

Proposición 2.7. *Dados S conjunto denso, C subconjunto denso en S y A cortadura de Dedekind de S, entonces* $A \cap C$ *es una cortadura de Dedekind de C.*

[12] Goldrey [(11)] define las propiedades que se conservan por isomorfismos de orden como invariantes de teoría del orden (ver página 168) y deja como ejercicio probar que el supremo de un conjunto es un invariante de teoría del orden (ver página 175).

Demostración. Solamente hay que demostrar que $A \cap C$ no tiene máximo. Sea $x \in A \cap C$ entonces, como x no es máximo de A existe $y \in A$ con $x < y$. Por ser C denso en S se tiene que existe $z \in C$ con $x < z < y$, pero $z \in A \cap C$ por lo que x no es el máximo de $A \cap C$.

Por la proposición 2.7, en el caso de que C sea denso en S, la siguiente función está bien definida:

(1)

$$\Psi : \begin{cases} \overline{S}^D \longrightarrow \overline{C}^D \\ A \longmapsto \Psi(A) = A \cap C. \end{cases}$$

De hecho, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Dados S conjunto denso y C subconjunto denso en S se tiene que Ψ es un isomorfismo de conjuntos ordenados.*

Demostración. Probamos primero que es inyectiva y conserva el orden. Si $A \subsetneq B \in S$, existe $x \in B - A$. Como B no tiene máximo, existe $y \in B$ con $x < y$. Como C es denso en S, existe $z \in C$ con $x < z < y$. Por tanto, $z \in (B - A) \cap C$, es decir $A \cap C \subsetneq B \cap C$.

Veamos que también es sobreyectiva. Sea $B \in \bar{C}^D$, sea $A = \{x \in S : x \leq b$ para algún $b \in B\}$. Es claro que A es una cortadura de S, y no puede tener máximo ya que también sería máximo de B. Por tanto, $A \in \bar{S}^D$. Por último, $\Psi(A) = A \cap C = \{x \in C : x \leq b$ para algún $b \in B\} = B$.

Consecuencia de las proposiciones 2.6 y 2.8 es el resultado con el que cerramos este apartado. Se trata de otra caracterización de los conjuntos densos que cumplen el axioma del supremo.

Corolario 2.3. *Dados S conjunto denso y C subconjunto denso en S, entonces S cumple el axioma del supremo si y solamente si S es isomorfo a $\bar{C}^D$.*

2.4 Embebimiento de los cuerpos arquimedianos en $\overline{\mathbb{Q}}^D$

Recordemos que todo cuerpo ordenado F es un conjunto totalmente ordenado y denso. Además, si F cumple el axioma del supremo entonces, por el corolario 2.1, F es arquimediano, es decir, $\mathbb{Q}$ es denso en F, por lo que por el corolario 2.3 debe ser isomorfo a $\overline{\mathbb{Q}}^D$ como conjunto ordenado. Veamos que también es isomorfo a $\overline{\mathbb{Q}}^D$ como cuerpo ordenado. Para ello hay que dotar a $\overline{\mathbb{Q}}^D$ de una estructura de cuerpo. La manera habitual de hacerlo, definiendo operaciones entre cortaduras y demostrando sus propiedades, es bastante tediosa. Sin embargo, si partimos de la existencia de un cuerpo ordenado que cumpla el axioma del supremo, se puede hacer de forma sencilla [13].

[13] En Feferman [(6)] se puede encontrar una idea similar, aunque nuestro desarrollo es diferente y nos permite obtener resultados más generales y la caracterización del corolario 2.8.

Dado un cuerpo arquimediano F, como $\mathbb{Q}$ es denso en F, consideraremos que $\Psi : \overline{F}^D \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^D$ está definida como en 1. Definimos la función $\Phi : F \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^D$ de la siguiente manera $\Phi := \Psi \circ i$. En principio, Φ es solamente una función entre conjuntos ordenados.

Por la proposición 2.8 sabemos que Ψ es un isomorfismo, y como i es inyectiva y conserva el orden, tenemos que Φ es inyectiva y conserva el orden. Realmente, podemos llegar más lejos.

Teorema 2.2. *Dado un cuerpo arquimediano F, la función Φ es inyectiva y define en su imagen de forma natural una estructura de cuerpo, de forma que, sobre la imagen, Φ es un isomorfismo de cuerpos ordenados.*

Demostración. Al ser inyectiva nos permite definir en $\Phi(F)$ las operaciones suma y producto de la siguiente forma: dados $A, B \in \Phi(F)$ definimos

$$A + B := \Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(B))$$

$$A * B := \Phi(\Phi^{-1}(A) * \Phi^{-1}(B)).$$

Es fácil ver que se cumplen las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas. Veamos, por ejemplo, la propiedad asociativa respecto la suma.

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \Phi(\Phi^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(B))) + \Phi^{-1}(C)) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(B) + \Phi^{-1}(C)) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(\Phi(\Phi^{-1}(B) + \Phi^{-1}(C)))) \\ &= A + (B + C).\end{aligned}$$

En cuanto a los elementos neutros, definimos el de la suma por $\Phi(0)$ y el del producto por $\Phi(1)$. Comprobemos que es correcto para la suma (para el producto es análogo).

$$A + 0 = \Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(0)) = \Phi(\Phi^{-1}(A)) = A.$$

Para los elementos recíprocos, dado $A \in \Phi(F)$ definimos

$$-A := \Phi(-\Phi^{-1}(A)) \text{ y } A^{-1} := \Phi((\Phi^{-1}(A))^{-1}).$$

Comprobemos para la suma que es correcto (para el producto es análogo).

$$A + (-A) = \Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(-A)) = \Phi(\Phi^{-1}(A) - \Phi^{-1}(A)) = \Phi(0).$$

Así, hemos dotado a $\Phi(F)$ de una estructura de cuerpo. Por la propia definición de las operaciones se desprende que Φ es un homomorfismo y, como es inyectivo y conserva el orden, sobre la imagen es un isomorfismo de cuerpos ordenados.

Tal y como hemos definido las operaciones podemos pensar que las estructuras de cuerpo definidas dependen del cuerpo F. Veamos que no es así (usaremos un subíndice para remarcar que las funciones que estamos utilizando tienen como conjunto inicial a un cuerpo determinado). En primer lugar, para todo cuerpo arquimediano F y para todo $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\Phi_F(q) = \{r \in \mathbb{Q}: r < q\}$ y, por tanto, $\Phi_F(q)$ no depende del cuerpo F. En particular, los elementos neutros no dependen del cuerpo. Veamos que la suma y el producto de cortaduras de $\mathbb{Q}$ no depende del cuerpo F. Antes, enunciemos un lema trivial que necesitaremos para el producto[14].

Lema 2.1. *Dados dos cuerpos arquimedianos F_1 y F_2, y dos elementos $a_1 \in F_1$ y $a_2 \in F_2$, para todo $q \in \mathbb{Q}$ son equivalentes:*

i) $\Phi_1(a_1) = \Phi_2(a_2)$.

ii) $q <_1 a_1$ si y solamente si $q <_2 a_2$.

iii) $q >_1 a_1$ si y solamente si $q >_2 a_2$.

iv) $-q <_1 -a_1$ si y solamente si $-q <_2 -a_2$.

v) $\Phi_1(-a_1) = \Phi_2(-a_2)$.

Proposición 2.9. *Dados dos cuerpos arquimedianos F_1 y F_2, y elementos $a_1, b_1 \in F_1$ y $a_2, b_2 \in F_2$ tales que $\Phi_1(a_1) = \Phi_2(a_2)$ y $\Phi_1(b_1) = \Phi_2(b_2)$ entonces $\Phi_1(a_1 + b_1) = \Phi_2(a_2 + b_2)$ y $\Phi_1(a_1 * b_1) = \Phi_2(a_2 * b_2)$.*

Demostración. Primero recordemos que, por hipótesis, para todo q racional se tiene que $q <_1 a_1$ si y solamente si $q <_2 a_2$, y $q <_1 b_1$ si y solamente si $<_2 b_2$. En particular, $0 <_1 a_1$ si y solamente si $0 <_2 a_2$.

Empecemos con la suma. Hay que demostrar que $\Phi_1(a_1 + b_1) = \Phi_2(a_2 + b_2)$. Sea $q \in \Phi_1(a_1 + b_1)$, esto ocurre solamente cuando $q <_1 a_1 +_1 b_1$. Entonces $q - a_1 <_1 b_1$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en F_1 existe un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $q - a_1 <_1 r <_1 b_1$, sea $s := q - r <_1 a_1$. Por lo que hemos comentado en el párrafo anterior, tenemos que $r <_2 b_2$ y $s <_2 a_2$. Por tanto, $q = r + s <_2 a_2 +_2 b_2$. Es decir, $q \in \Phi_2(a_2 + b_2)$. Simétricamente demostraríamos la inclusión contraria.

Respecto a la multiplicación, podemos suponer que ninguno de los elementos es el cero, en otro caso sería trivial. Sea $q \in \Phi_1(a_1 * b_1)$, esto ocurre solamente cuando $q <_1 a_1 *_1 b_1$. Tratemos primero el caso en que a_1 y b_1 son positivos, caso que demostramos de forma análoga a la suma. Como $q *_1 a_1^{-1} <_1 b_1$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en F_1 existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $q *_1 a_1^{-1} <_1 r <_1 b_1$. Hacemos $s := q *_1 r^{-1} < a_1$ y, como antes, tendremos que $q \in \Phi_2(a_2 * b_2)$. Nos queda ver qué pasa en los otros casos. Supongamos que $a_1 < 0$ y $b_1 > 0$. Por el lema sabemos que $\Phi_1(-a_1) = \Phi_2(-a_2)$ y aplicando lo que acabamos de probar llegamos a $\Phi_1(-a_1 * b_1) = \Phi_2(-a_2 * b_2)$, aplicando nuevamente el lema obtenemos $\Phi_1(a_1 * b_1) = \Phi_2(a_2 * b_2)$. Los otros casos se tratan análogamente.

Podemos concluir los siguientes resultados.

Corolario 2.4. *Dados dos cuerpos arquimedianos F_1 y F_2, si $\Phi_1(F_1) \subset \Phi_2(F_2)$ entonces F_1 es isomorfo a un subcuerpo de F_2.*

Demostración. Con la proposición anterior se comprueba que $\Phi_2^{-1}(\Phi_1(F_1))$ es un subcuerpo de F_2.

[14] Aunque por el contexto no es necesario, en algunos pasos utilizamos subíndices para remarcar que la operación o la comparación es en el cuerpo correspondiente.

Corolario 2.5. *Dados dos cuerpos arquimedianos F_1 y F_2, si $\Phi_1(F_1) = \Phi_2(F_2)$ entonces son cuerpos ordenados isomorfos.*

Respecto a los cuerpos que verifican el axioma del supremo, por la proposición 2.6 se tiene que Φ es biyectiva, y teniendo en cuenta el teorema 2.2 podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 2.6. *Dado un cuerpo ordenado F son equivalentes.*

i) F cumple el axioma del supremo.

ii) F es arquimediano y la función Φ es biyectiva.

iii) F es arquimediano y la función Φ induce de forma natural una estructura de cuerpo en $\overline{\mathbb{Q}}^D$, de forma que Φ es un isomorfismo de cuerpos ordenados.

Si además tenemos en cuenta el corolario 2.5 deducimos el siguiente corolario, uno de los resultados importantes del trabajo.

Corolario 2.7. *Los cuerpos ordenados que cumplen el axioma del supremo son isomorfos.*

Tengamos presente que este resultado no asegura que existan cuerpos que cumplan el axioma del supremo, solamente hemos demostrado la unicidad.

Por otra parte, estamos en condiciones de justificar otra calificación, original de Hilbert (15), del cuerpo de los reales como cuerpo completo.

Corolario 2.8. *Si existe un cuerpo que cumple el axioma del supremo, entonces es el único arquimediano que contiene a todos los arquimedianos.*

Demostración. Sea F un cuerpo que cumple el axioma del supremo. Por el corolario 2.1, F debe ser arquimediano. Además, por el corolario 2.6, $\Phi(F) = \overline{\mathbb{Q}}^D$, por lo que por el corolario 2.4, todo cuerpo arquimediano es isomorfo a un subcuerpo de F. Para la unicidad, simplemente dos cuerpos arquimedianos que contienen a todos los arquimedianos se contienen mutuamente.

Terminamos la sección con un resultado adicional. Recordemos que la función Φ siempre es inyectiva. Por lo que para que sea biyectiva solamente necesitamos comprobar que es sobreyectiva. Pero Φ asocia a cada $x \in F$ la cortadura de Dedekind en $\mathbb{Q}$ formada por los racionales menores que x. Ahora bien, para las que no son gap tenemos un $q \in \mathbb{Q}$ que las define, su supremo. Por tanto, solamente necesitamos comprobar que para todo G gap de $\mathbb{Q}$ y su correspondiente conjunto de cotas $U(G) \subset \mathbb{Q}$ existe $x \in F$ tal que $G < x < U(G)$ (esto último es, en realidad, consecuencia de la densidad de $\mathbb{Q}$ en todo cuerpo arquimediano y se puede deducir directamente sin necesidad de la función Φ). Vamos a enunciar lo dicho.

Corolario 2.9. *Dado un cuerpo ordenado F son equivalentes.*

i) F cumple el axioma del supremo.

ii) F es arquimediano y la función Φ es sobreyectiva.

iii) F es arquimediano y para todo G gap de $\mathbb{Q}$ y su correspondiente conjunto de cotas $U(G) \subset \mathbb{Q}$ existe $x \in F$ tal que $G < x < U(G)$.

3. El Principio de los intervalos encajados

En esta sección vamos a ver la relación del PIE con el Axioma del Supremo y con la CSC en cuerpos ordenados arquimedianos y no arquimedianos. Para ello empezaremos analizando el PIE, en especial su relación con el PIE_0.

3.1 Principio de los intervalos encajados.

Dado un conjunto totalmente ordenado, consideremos dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que cumplan la siguiente condición: $a_1 \leq a_2 \leq . . . \leq a_n \leq . . . \leq b_n \leq . . . \leq b_2 \leq b_1$. Estas sucesiones determinan la sucesión de *intervalos acotados, cerrados y encajados* $I_n = [a_n, b_n]$.

Cuando en un conjunto totalmente ordenado toda sucesión de intervalos acotados, cerrados y encajados tiene intersección no vacía, se dice que el conjunto cumple el Principio de los Intervalos Encajados (PIE).

Como comentábamos en la introducción, para cuerpos arquimedianos vamos a probar una condición equivalente que denotamos PIE_0: un conjunto totalmente ordenado cumple el PIE_0 si para toda sucesión de intervalos cerrados y encajados cuyas longitudes tiene por ínfimo el 0 tiene entonces por intersección un único elemento[15].

Antes de demostrar la equivalencia veamos otras formas de expresar el PIE y el PIE_0. En primer lugar, observemos que decir que un conjunto I no es vacío es equivalente a decir: si $|I| \leq 1$ entonces[16] $|I| = 1$. En segundo lugar, en el caso de una sucesión de intervalos cerrados y encajados, siendo I la intersección de todos ellos, la condición $|I| \leq 1$ es equivalente a las siguientes:

i) Para todos $x, y \in$ I se tiene que $x = y$.

ii) Para todos x, y tales que $\{a_n\} \leq x \leq y \leq \{b_n\}$ se tiene que $x = y$.

iii) Para todos x, y tales que $\{a_n\} \leq x$ e $y \leq \{b_n\}$ se tiene que $x \geq y$.

Recapitulando, tenemos las siguientes versiones del PIE.

Lema 3.1. *Las siguientes condiciones del PIE son equivalentes:*

---

[15] Para los subcuerpos de $\mathbb{R}$ se define la longitud de los intervalos como la diferencia entre sus extremos, esto es Long $([a, b]) = b - a$. Generalizamos la definición para cuerpos ordenados cualesquiera. Observemos que la longitud de un intervalo será siempre mayor o igual que 0, por tanto, el ínfimo de una sucesión de longitudes de intervalos, si existe, será mayor o igual que 0.

[16] Dadas dos proposiciones A y B podemos establecer las siguientes equivalencias:

$$\neg B \equiv (\neg B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge A) \equiv (B \vee A) \rightarrow (\neg B \wedge A).$$

Pero si además añadimos la condición de que A y B son incompatibles, esto es, A es equivalente a $\neg B \wedge A$, deducimos que en el caso de incompatibilidad se tiene que

$$\neg B \equiv (B \vee A) \rightarrow A.$$

Pues bien, consideremos que A: $|I| = 1$ y B: $|I| = 0$. Entonces tenemos que $I \neq \emptyset$ es equivalente a $|I| \leq 1 \rightarrow |I| = 1$.

i) $I \neq \emptyset$

ii) Si $|I| \leq 1$ *entonces* $|I| = 1$

iii) Si para todos $x, y \in F$ *tales que* $\{a_n\} \leq x$ *e* $y \leq \{b_n\}$ *se tiene que* $x \geq y$*, entonces* $|I| = 1$.

Respecto al PIE_0 solamente vamos a versionarlo ligeramente.

Lema 3.2. *Las siguientes condiciones del* PIE_0 *son equivalentes:*

i) Si $\text{ínf}\,(b_n - a_n) = 0$ *entonces* $|I| = 1$.

ii) Si para todo $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon)$ *tal que* $b_{n(\epsilon)} \leq a_{n(\epsilon)} + \epsilon$*, entonces* $|I| = 1$.

Relacionemos ahora la condición iii del lema 3.1 con la ii del lema 3.2.

Lema 3.3. *Respecto a los enunciados:*

1. Para todos $x, y \in F$ *tales que* $\{a_n\} \leq x$ *e* $y \leq \{b_n\}$ *se tiene que* $x \geq y$.

2. Para todo $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon)$ *tal que* $b_{n(\epsilon)} \leq a_{n(\epsilon)} + \epsilon$.

Se tiene que 2 implica 1 y que en los cuerpos arquimedianos el recíproco es cierto.

Demostración. Veamos la primera parte. Demostremos el contrarrecíproco, supongamos que no se cumple 1 y tenemos $y < x$ tales que $\{a_n\} \leq x$ e $y \leq \{b_n\}$, entonces, tomamos $\epsilon = (y - x)/2$ y se tiene que $\{b_n\} \geq y = x + 2\epsilon > x + \epsilon \geq \{a_n\} + \epsilon$. Esto contradice 2 ya que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n se tiene que $b_n > a_n + \epsilon$.

Supongamos ahora que el cuerpo es arquimediano y se cumple 1. Dado $\epsilon > 0$, por la caracterización vi de la proposición 2.5 de cuerpo arquimediano y usándola también para sucesiones decrecientes, elegimos $m(\epsilon)$ que cumpla la caracterización en ambas sucesiones para $\epsilon/2$ (el máximo de los dos ya que si la condición se cumple para un elemento de la sucesión entonces también se cumple para los siguientes). Tomando $x = a_{m(\epsilon)} + \epsilon/2$ e $y = b_{m(\epsilon)} - \epsilon/2$ se obtiene que, por hipótesis, $x \geq y$, es decir $a_{m(\epsilon)} + \epsilon/2 \geq b_{m(\epsilon)} - \epsilon/2$.

De los tres lemas se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Dado un cuerpo ordenado F se tiene que:*

1. Si F cumple el PIE entonces cumple el PIE_0.

2. Si F es arquimediano entonces cumple el PIE si y solamente si cumple el PIE_0.

Demostración. Dadas las proposiciones lógicas B, C y D, si se tiene que $\mathsf{B} \to \mathsf{C}$ entonces se tiene que $(\mathsf{C} \to \mathsf{D}) \to (\mathsf{B} \to \mathsf{D})$. Pues para nosotros B es el enunciado 2 del lema 3.3, C es el 1 del mismo lema y D es $|I| = 1$. Así, PIE es $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y PIE_0 es $\mathsf{B} \to \mathsf{D}$.

Terminamos el apartado recordando que un objetivo de este trabajo es deducir que el único cuerpo arquimediano que cumple el PIE es el cuerpo de los números reales. Pero que también veremos que hay cuerpos que cumplen el PIE_0 y no cumplen el PIE. Por último, mencionaremos ejemplos de cuerpos no arquimedianos que cumplen el PIE.

3.2 El Principio de los intervalos encajados y el axioma del supremo

En este apartado veremos la equivalencia, en cuerpos arquimedianos, entre el principio de los intervalos encajados y el axioma del supremo. Para ello, utilizaremos la siguiente notación para un cuerpo ordenado F dado:

- Denotamos por $\mathcal{X}(F)$, o simplemente $\mathcal{X}$, a la familia de todos los subconjuntos no vacíos y acotados superiormente de F.

- Denotamos por $\mathcal{I}(F)$, o simplemente $\mathcal{I}$, al conjunto de las sucesiones de intervalos acotados, cerrados y encajados de F para las que el ínfimo de las longitudes es 0.

- Dado $X \in \mathcal{X}$, sea $\mathcal{I}(X)$ el subconjunto de $\mathcal{I}$ de las sucesiones $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ que cumplan que $\{a_n\} \subset L(U(X))$ y $\{b_n\} \subset U(X)$. En principio, $\mathcal{I}(X)$ puede ser vacío.

- Dado $\{I_n\}$ en $\mathcal{I}$, sea $\mathcal{X}(\{I_n\}) \subset \mathcal{X}$ la familia de todos los conjuntos X tal que para todo n se tiene $a_n \in L(U(X))$ y $b_n \in L(U(X))$. Evidentemente $\mathcal{X}(\{I_n\})$ nunca es vacío ya que el conjunto $X = \{a_n\}$ cumple la condición.

- Dado $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, definimos $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0) = \bigcup_{X_j \in \mathcal{X}_0} \mathcal{I}(X_j)$.

- Dada $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$, definimos $\mathcal{X}(\mathcal{I}_0) = \bigcup_{\{I_n\} \in \mathcal{I}_0} \mathcal{X}(\{I_n\})$.

Veamos unos resultados inmediatos, entre ellos, otras caracterizaciones de los cuerpos arquimedianos.

Proposición 3.1. *Un cuerpo ordenado es arquimediano si y solamente si para todo $X \in \mathcal{X}$ se tiene que $\mathcal{I}(X)$ es distinto del vacío.*

Demostración. Supongamos que sea arquimediano. Dado $X \in \mathcal{X}$ tomemos $a \in X$ y $b \in U(X)$ con la precaución de que $a \neq b$. Definimos $I_0 = [a_0, b_0] := [a, b]$, y denotamos los puntos medios por $p_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$. Ahora definimos una sucesión de intervalos de forma recursiva de la siguiente manera: si $p_n \in U(X)$ definimos $I_n = [a_n, b_n] := [a_{n-1}, p_n]$, en otro caso $I_n = [a_n, b_n] := [p_n, b_{n-1}]$. Así, para todo n se tiene que $b_n \in U(X)$, $a_n \in L(U(X))$ y $b_n - a_n = (b - a)/2^n$, que por arquimedianidad (condición v de la proposición 2.4) implica que las longitudes tienden a cero.

Por otra parte, si F no es arquimediano tenemos que $\mathbb{Z}$ está acotado. Pero $\mathcal{I}(\mathbb{Z})$ es vacío. En efecto, basta tomar $\epsilon = 1/2$ para comprobar que no puede haber un intervalo $I = [a, b]$ de longitud menor que ϵ con $a \in L(U(\mathbb{Z}))$ y $b \in U(\mathbb{Z})$.

Lema 3.4. *Para todo* $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ *se tiene que* $\{I_n\} \in \mathcal{I}(\mathcal{X}(\{I_n\}))$, *y el cuerpo es arquimediano si y solamente si para a todo* $X \in \mathcal{X}$ *se tiene que* $X \in \mathcal{X}(\mathcal{I}(\{X\}))$.

Corolario 3.2. *Los cuerpos ordenados cumplen que* $\mathcal{I}(\mathcal{X}) = \mathcal{I}$, *y son arquimedianos si y solamente si* $\mathcal{X}(I) = \mathcal{X}$.

Para llegar al resultado central del apartado usaremos la siguiente equivalencia.

Proposición 3.2. *Sea* $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ *con* $I_n = [a_n, b_n]$, *entonces son equivalentes:*

i) $\{\alpha\} = \bigcap I_n$.

ii) $\alpha = \sup\{a_n\}$.

iii) $\alpha = \text{ínf}\{b_n\}$.

iv) Para todo $X \in \mathcal{X}(\{I_n\})$ *se tiene que* $\alpha = \sup X$.

Demostración. Mostremos que i implica ii. Como las longitudes de los intervalos tienden a cero, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon)$ tal que $b_{n(\epsilon)} \leq a_{n(\epsilon)} + \epsilon$. Por tanto, $\{a_n\} \leq \alpha \leq b_{n(\epsilon)} \leq a_{n(\epsilon)} + \epsilon$ y podemos aplicar la proposición 2.3. Que ii implica i se debe a que α es cota de $\{a_n\}$ y es la menor.

Análogamente, iii también es equivalente.

Veamos que ii y iii implican iv. Como $\{a_n\} \subset L(U(X))$ se da que $L(U(\{a_n\})) \subset L(U(X))$, y por ii se tiene que $\alpha \in L(U(\{a_n\}))$. Así que, $\alpha \in L(U(X))$. Análogamente, por iii se llega a que $\alpha \in U(X)$, y por la proposición 2.2 se tiene que $\alpha = \sup X$. Recíprocamente, si se da iv, como $\{a_n\} \in \mathcal{X}(\{I_n\})$, se da ii.

Por la proposición 3.2 y el último corolario enunciamos el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Si F es un cuerpo arquimediano, son equivalentes:*

i) F cumple el PIE_0. *Esto es, para todo* $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ *existe* α *tal que* $\{\alpha\} = \bigcap I_n$.

ii) Para todo $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ *existe* α *tal que para todo* $X \in \mathcal{X}(\{I_n\})$ *se tiene que* $\alpha = \sup X$.

iii) Para todo $X \in \mathcal{X}$ *existe* $\sup X$.

Por el corolario 2.1 un cuerpo que cumple el axioma del supremo es arquimediano. Podemos así dar el siguiente resultado con el que concluimos este apartado.

Corolario 3.4. *Un cuerpo ordenado F cumple el axioma del supremo si y solamente si es arquimediano y cumple el* PIE_0.

3.3 El Principio de los intervalos encajados y la convergencia de las sucesiones de Cauchy

En los cuerpos ordenados las sucesiones de Cauchy se definen de la forma usual teniendo en cuenta que el valor absoluto de un elemento es el máximo entre él y su opuesto (notemos que no tiene por qué tomar valores en $\mathbb{R}$)[17]. Con dicho valor absoluto se puede definir también la convergencia de una sucesión.

En este apartado vamos a trabajar con los cuerpos que poseen sucesiones decrecientes de elementos positivos que convergen al cero, se dice entonces que satisfacen el *axioma de contabilidad*, (ver página 234 de Mendelson (16)). En Aguiló (17) se muestra que un cuerpo ordenado es *metrizable* si y solamente si existe una sucesión que converge a cero y cuyos términos son distintos de cero. Pero esto es equivalente a decir que cumplen el axioma de contabilidad, basta tomar el valor absoluto y coger una subsucesión decreciente. Por ello, nos referiremos a estos cuerpos como *cuerpos ordenados metrizables*, aunque, en realidad, no vamos a utilizar ninguna propiedad del hecho de ser metrizables, solamente nos interesa que satisfacen el axioma de contabilidad. Ejemplos de cuerpos ordenados metrizables son los cuerpos de las funciones racionales en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$ ya que la sucesión de polinomios $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada, y por tanto la inversa converge a cero. En Aguiló (17) también se expone el ejemplo de un cuerpo ordenado que no es metrizable (Mendelson (16) cita ejemplos de Sikorski (18) Hauschild (19)).

En este apartado vamos a demostrar la equivalencia, en los cuerpos ordenados metrizables, entre el PIE_0 y la CSC. En cuanto a los cuerpos ordenados no metrizables, decir que en ellos toda sucesión de Cauchy solamente tiene un número finito de términos distintos y serán, por tanto, convergentes[18]. Por otra parte, en estos cuerpos no existen sucesiones de intervalos cuyas longitudes tiendan a cero, ya que, en ese caso, la sucesión formada por las longitudes de los intervalos verificaría la condición del axioma de contabilidad. Podemos entonces considerar que estos cuerpos verifican tanto el PIE_0 como la CSC.

Vamos a utilizar una técnica similar a la del apartado anterior. De hecho, utilizaremos $\mathcal{I}(F)$ y añadimos las siguientes notaciones. Dado un cuerpo ordenado F:

- Denotamos por $\mathcal{C}(F)$, o simplemente $\mathcal{C}$, al conjunto de las sucesiones de Cauchy en F.
- Dado $\{I_n\} \in \mathcal{I}$, sea $\mathcal{C}(\{I_n\})$ el subconjunto de $\mathcal{C}$ de las sucesiones de Cauchy con $x_n \in I_n$. $\mathcal{C}(\{I_n\})$ nunca es vacío ya que, de hecho, toda sucesión con $x_n \in I_n$ es de Cauchy[19].
- Dado $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ sea $\mathcal{I}(\{x_n\})$ el subconjunto de $\mathcal{I}$ de las sucesiones $\{I_n\}$ con $x_n \in I_n$. En principio, $\mathcal{I}(\{x_n\})$ puede ser vacío.
- Dado $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ definimos $\mathcal{C}(\mathcal{I}_0) = \bigcup_{\{I_n\} \in \mathcal{I}_0} \mathcal{C}(\{I_n\})$.

---

[17] Para una comprobación de las propiedades del valor absoluto ver, por ejemplo, el ya citado Waerden (3).

[18] En realidad, no es difícil comprobar que un cuerpo ordenado es metrizable si y solamente si existen sucesiones de Cauchy que no se hagan constantes: Si es metrizable, existe una sucesión de elementos positivos que tiende a cero, pero entonces es una sucesión Cauchy que nunca se hace constante; recíprocamente, si existe sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ que no se hace nunca constante, se comprueba que la sucesión $x_{n+1} - x_n$ converge a cero, y se podría extraer una subsucesión con términos distintos de cero.

[19] En efecto, para todo $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n(\epsilon)$ se tiene que $b_n - a_n \leq \epsilon$, y por estar encajados, para todos $p \geq q \geq n(\epsilon)$ se tiene que $|x_p - x_q| \leq b_q - a_q \leq \epsilon$.

- Dado $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ definimos $\mathcal{I}(\mathcal{C}_0) = \bigcup_{\{x_n\}\in\mathcal{C}_0} \mathcal{I}(\{x_n\})$.

Proposición 3.3. *Un cuerpo ordenado es metrizables si y solamente si para todo $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{I}(\{x_n\})$ es distinto del vacío.*

Demostración. Como la sucesión es de Cauchy entonces está acotada. Esto es, existen A y B tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A < x_n < B$. Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por n_m a un índice que cumpla que para todos $p \geq q \geq n_m$ se tiene que $|x_p - x_q| \leq a_m$, donde $\{a_m\}$ es una sucesión decreciente de elementos positivos y que tiene por ínfimo el cero (que existe por la hipótesis de ser un cuerpo metrizable). Podemos suponer que $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m \leq \cdots$

Definimos la siguiente sucesión de intervalos:

Para n con $1 \leq n < n_1$, sea $I_n = [A, B]$.

Para n con $n_{m-1} \leq n < n_m$ y $m > 1$, sea $I_n = [x_{n_m} - a_m, x_{n_m} + a_m]$.

Observemos que, para todos p, q con $p \geq q$ se tiene que $x_p \in I_q$. Es decir, para todo n se cumple que $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ contiene a todo x_p con $p \geq n$, y, por tanto, no es vacío. Además, el ínfimo de sus longitudes es cero.

Ahora formamos la sucesión de intervalos $J_n = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Obviamente son encajados y, como hemos dicho, J_n contiene a todo x_p con $p \geq n$. Además, la longitud de J_n es menor o igual que la longitud de I_n, lo que implica que el ínfimo de sus longitudes también es cero. En conclusión, $I(\{x_n\})$ no es vacío.

En cuanto al recíproco, ya hemos comentado, para cuerpos no metrizables $\mathcal{I}(\{x_n\})$ siempre es vacío.

De las definiciones y de la proposición se siguen los siguientes enunciados.

Lema 3.5. *Para todo $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ se tiene que $\{I_n\} \in \mathcal{I}(\mathcal{C}(\{I_n\}))$, y el cuerpo es metrizable si y solamente si para todo $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ se tiene que $\{x_n\} \in \mathcal{C}(I(\{x_n\}))$.*

Corolario 3.5. *En los cuerpos ordenados se cumple que $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}$ y son metrizables si y solamente si $\mathcal{C}(\mathcal{I}) = \mathcal{C}$.*

En el siguiente teorema, uno de los puntos importantes del trabajo, utilizaremos que $\mathcal{C}(\mathcal{I}) = \mathcal{C}$ y así demostraremos la CSC para las sucesiones de $\mathcal{C}(\mathcal{I})$. Como en otros resultados de este trabajo, el enunciado es en sí una demostración. Solamente hay que tener en cuenta cuestiones como que '$a \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$' es equivalente a '$a < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$' y a '$a < \epsilon/2$ para todo $\epsilon > 0$'; o que '$a \leq b$' es equivalente a '$a \leq b + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$'. No obstante, daremos una aclaración más en una nota al pie. Para seguir los enunciados nos podemos apoyar en la figura 3.

Teorema 3.1. *En un cuerpo ordenado metrizable F son equivalentes:*

i) F cumple el PIE_0.

ii) Para toda sucesión $\{I_n\} \in \mathcal{J}$ *se tiene que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, *donde el elemento*[20] $x_0 \in F$ *depende de* $\{I_n\}$.

iii) Para toda sucesión $\{I_n = [a_n, b_n]\} \in \mathcal{J}$ *existe un único* $x_0 \in F$ *tal que para todo* $p \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $|a_p - x_0| \leq \mathrm{Long}(I_p)$ *y* $|b_p - x_0| \leq \mathrm{Long}(I_p)$.

iv) Para toda sucesión $\{I_n\} \in \mathcal{J}$ *existe un único* $x_0 \in F$ *tal que para toda sucesión* $\{x_n\} \in \mathcal{C}(\{I_n\})$ *y para todo* $p \in N$ *se tiene que* $|x_p - x_0| \leq \mathrm{Long}(I_p)$.

v) Para toda sucesión $\{I_n\} \in \mathcal{J}$ *existe un único* $x_0 \in F$ *tal que para toda sucesión* $\{x_n\} \in \mathcal{C}(I_n)$, *para todo* $\epsilon > 0$ *y para todo* $p \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $|x_p - x_0| \leq \epsilon + \mathrm{Long}(I_p)$[21].

vi) Para toda sucesión $\{I_n\} \in \mathcal{J}$ *existe un único* $x_0 \in F$ *tal que para toda sucesión* $\{x_n\} \in \mathcal{C}(\{I_n\})$ *y para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n(\epsilon)$ *tal que para todo* $p \geq n(\epsilon)$ *se tiene que* $|x_p - x_0| < \epsilon$.

vii) Para toda sucesión $\{I_n\} \in \mathcal{J}$, *se tiene que para toda sucesión* $\{x_n\} \in \mathcal{C}(\{I_n\})$ *converge únicamente a un* x_0.

viii) Toda sucesión $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ *converge a un único punto.*

ix) F cumple la CSC.

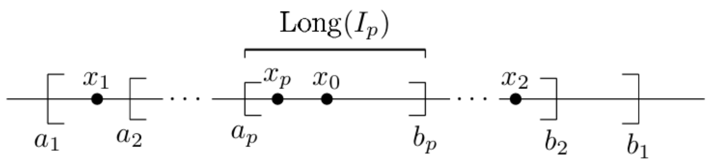


Figura 3. Representación de una sucesión de intervalos $\{I_n\} \in \mathcal{J}$, y de una sucesión $\{x_n\} \in \mathcal{C}(\{I_n\})$.

Hemos comentado que los cuerpos ordenados no metrizables cumplen tanto el PIE_0 como la CSC. Por tanto, obtenemos el siguiente resultado general.

Corolario 3.6. *Un cuerpo ordenado cumple el* PIE_0 *si y solamente si cumple la CSC.*

Teniendo en cuenta el corolario 3.1 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3.7. *Un cuerpo arquimediano cumple el PIE si y solamente si cumple la CSC.*

[20] Tenemos la ambigüedad de que $\{x_0\}$ puede denotar tanto el conjunto cuyo único elemento es x_0, como la sucesión constante $x_n = x_0$. No obstante, el contexto aclara a qué nos referimos.

[21] Para la siguiente equivalencia usamos en un sentido que $\mathrm{ínf}\{\mathrm{Long}(I_n)\} = 0$, y en el otro que $|x_p - x_0| \leq |x_p - x_{n(\epsilon)}| + |x_{n(\epsilon)} - x_0|$ y que si $p \leq n(\epsilon)$ entonces $|x_p - x_{n(\epsilon)}| \leq \mathrm{Long}(I_p)$.

4. El completado por sucesiones de Cauchy

La construcción de $\mathbb{R}$ mediante las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ permite mostrar que $\mathbb{R}$ cumple la CSC. Este proceso se puede generalizar a cualquier cuerpo ordenado, dando lugar a los denominados completados por sucesiones. Los completados son cuerpos ordenados que cumplen la CSC y que, como esbozaremos, son una extensión de los cuerpos generadores[22].

Dado un cuerpo ordenado F denotamos por $\bar{F}^{C}$ su completado por sucesiones. $\bar{F}^{C}$ se construye como las clases de equivalencia de $\mathcal{C}(F)$ con la relación:

$$\{q_n\} \mathrm{R} \{r_n\} \text{ si } \forall\epsilon > 0 \; \exists n(\epsilon) \text{ tal que } \forall n \geq n(\epsilon) \text{ se tiene que } |q_n - r_n| \leq \epsilon.$$

Dada la clase $\alpha \in {}^{C}$, sus representantes son sucesiones en F. Para un $x \in F$ la sucesión de Cauchy constante $\{x\}$ pertenece a una clase, a la clase $[\{x\}]$. Se demuestra que esto define un isomorfismo de cuerpos ordenados de F en su imagen, que será un subcuerpo de ^{C}. Es decir, podemos considerar que $F \subset {}^{C}$ y denotar a $[\{x\}]$ simplemente con x cuidando las ambigüedades. Entonces, si una sucesión $\{x_n\}$ de F converge a $x \in F$ tendremos que $\{x_n\}$, al estar relacionado con la sucesión constante $\{x\}$, es un representante de $x \in \bar{F}^{C}$. Pero se demuestra que los representantes, como sucesión en ^{C}, convergen al número que representan. Por tanto, si $\{x_n\} \in F$ converge a $x \in F$ entonces, como elementos de ^{C}, la sucesión $\{x_n\}$ también converge a x. En particular, si una sucesión converge a 0 en F, entonces converge a 0 en ^{C}. Esto nos permite enunciar los siguientes corolarios.

Corolario 4.1. *F es arquimediano si y solamente si $\bar{F}^{C}$ es arquimediano.*

Corolario 4.2. *F es metrizable si y solamente si $\bar{F}^{C}$ es metrizable.*

En realidad, de estos dos corolarios solamente utilizaremos el primero.

4.1 El cuerpo ordenado de los números reales

Definimos el cuerpo de los números reales como el completado por sucesiones del cuerpo de los números racionales, es decir, $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}}^{C}$.

Veamos que se cumplen las caracterizaciones comentadas en la introducción. Por los corolarios 2.7, 3.1, 3.4 y 3.7 solamente nos quedaba demostrar la existencia, que se verifica con $\mathbb{R}$ ya que por su definición cumple la CSC y por el corolario 4.1 es arquimediano.

A estas caracterizaciones podemos añadir otras relevantes que hemos ido viendo a lo largo del trabajo.

Corolario 4.3. *Dado un cuerpo ordenado F, son equivalentes:*

i) F es isomorfo a $\mathbb{R}$

---

22 Para una descripción detallada de este proceso se puede consultar el apartado 11.2 de Waerdem [3] o el apartado 5.6 de Mendelson [16] (esta última evita el uso del concepto de *ideal*). Comenta Harrison [13] (ver página 19) que el proceso de completado se puede extender a espacios uniformes, pero el estudio de tales espacios no es de interés en este trabajo.

ii) F cumple el axioma del supremo (F es Dedekind-completo).

iii) En F todo conjunto acotado inferiormente tiene ínfimo.

iv) En F no hay gaps.

v) En F toda cortadura de Dedekind tiene supremo, o lo que es lo mismo, es de la forma $\{x \in F : x < \alpha\}$ *para cierto* $\alpha \in F$.

vi) F es arquimediano y para todo G gap de $\mathbb{Q}$ *y su correspondiente conjunto de cotas* $U(G) \subset \mathbb{Q}$ *existe* $x \in F$ *tal que* $G < x < U(G)$.

vii) En F toda sucesión monótona y acotada es convergente.

viii) F es arquimediano y cumple la CSC (F es Cauchy-completo).

ix) F es arquimediano y cumple el PIE_0.

x) F es arquimediano y cumple el PIE.

xi) F es arquimediano y contiene a todos los arquimedianos (F es maximal arquimediano).

La mayoría de estas caracterizaciones se pueden encontrar en la página 26 de Artmann [(4)] y la página 95 de Cohen *et al.* [(20)].

Mencionar la distinción que hacemos entre el PIE y el PIE_0 y la caracterización vi que reduce las dos anteriores a los gaps de $\mathbb{Q}$.

4.2 El completado por sucesiones del cuerpo de las funciones racionales

Como hemos visto, en cuerpos arquimedianos el PIE es equivalente al PIE_0, pero es que ¡el único arquimediano que lo cumple es $\mathbb{R}$!. Cobra así mayor interés saber que sucede en los cuerpos no arquimedianos. Es decir, nos preguntamos si en los cuerpos ordenados no arquimedianos el PIE no es equivalente al PIE_0. Para ello, basta encontrar cuerpos ordenados que cumplan el PIE_0 (o equivalentemente la CSC) y no cumplan el PIE. Un conocido ejemplo es el cuerpo de las series de Laurent formales (ver Mendelson [(16)] página 219), que abreviadamente denotaremos por SLf. No obstante, aprovechando el concepto de *completado por sucesiones* vamos a mostrar otro ejemplo.

Buscamos un cuerpo ordenado, no arquimediano, que cumpla la CSC y no cumpla el PIE. Como $\mathbb{R}$ si cumple la CSC, es natural empezar probando con el cuerpo de las funciones racionales en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(X)$, que sabemos que no es arquimediano. Se puede comprobar que la sucesión de intervalos de término general $I_n = \left[n, \frac{X}{n}\right]$ certifica que $\mathbb{R}(X)$ no cumple el PIE. Desafortunadamente, este cuerpo tampoco cumple la CSC. Para verlo basta considerar la sucesión de funciones racionales:

$$1, 1 + \frac{1}{X}, 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}, \ldots$$

y comprobar que la sucesión es de Cauchy y no convergente[23]. Ahora bien, construyendo el completado por sucesiones del cuerpo de las funciones racionales obtendremos un cuerpo que cumple el CSC (y por tanto cumple PIE_0). Veamos que, sin embargo, este cuerpo no cumple el PIE. De hecho, nos sirve la sucesión de intervalos que acabamos de comentar para el caso $\mathbb{R}(X)$.

Proposición 4.1. *El completado por sucesiones del cuerpo de las funciones racionales sobre* $\mathbb{R}$ *no cumple el PIE.*

Demostración. Nuestro contraejemplo es la sucesión de intervalos $I_m = \left[m, \frac{X}{m}\right]$. Veamos que la intersección es vacía.

Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{R}(X)}^C$ y sea $\{f_n\} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}(X))$ un representante de α. Por el algoritmo de Euclides, las funciones racionales f_n se pueden expresar de forma única como $f_n = q_n + \frac{r_n}{g_n}$, donde $q_n, r_n, g_n \in \mathbb{R}[X]$, el grado de r_n es menor que el de g_n y el coeficiente del término de mayor grado g_n es 1 (ver página 143 de Lang [(21)]). Por ser una sucesión de Cauchy, se tiene que existe cierto n_0 tal que para todos $n_1, n_2 > n_0$ se cumple que $\left|f_{n_1} - f_{n_2}\right| < \frac{1}{X}$. Por tanto, q_n debe permanecer constante para todo $n > n_0$, denotemos por q_0 a este polinomio. Podemos diferenciar los siguientes casos:

- $q_0 = 0$, en este caso $f_n \notin I_1$ para todo $n > n_0$.
- Grado de q_0 mayor o igual que 2. De nuevo $f_n \notin I_1$ para todo $n > n_0$.
- Grado de q_0 igual a 1. Sea $a_1 \neq 0$ el término de X. Tenemos dos casos:

    - $a_1 < 0$, entonces $f_n \notin I_1$ para todo $n > n_0$.
    - $a_1 > 0$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $M^{-1} < a_1$ y por tanto $f_n \notin I_M$ para todo $n > n_0$.

- Grado de q_0 igual a 0. Sea $a_0 \neq 0$ el término del monomio de grado 0.

Volvemos a tener dos posibilidades:

- $a_0 < 0$, entonces $f_n \notin I_1$ para todo $n > n_0$.
- $a_0 > 0$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a_0 < M$ y por tanto $f_n \notin I_M$ para todo $n > n_0$.

Como vemos, en todos los casos existen $M, n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n > n_0$ se tiene que $f_n \notin \left[M, \frac{X}{M}\right]$. De lo que se sigue que α no pertenece a todos los intervalos. Es decir, la intersección es vacía.

---

[23] Similarmente podemos definir una sucesión de intervalos encajados cuyas longitudes tienden a cero y no cumple el PIE_0:

$$[1, 1 + 2/X], [1 + 1/X, 1 + 1/X + 2/X^2], [1 + 1/X + 1/X^2 , 1 + 1/X + 1/X^2 + 2/X^3], \ldots$$

Resumiendo, el completado por sucesiones del cuerpo $\mathbb{R}(X)$ es un ejemplo de un cuerpo ordenado metrizable en el que toda sucesión de Cauchy es convergente (y, por tanto, cumple el PIE_0) y, sin embargo, no cumple el PIE.

5. Conclusiones y complementos

A lo largo del trabajo hemos demostrado las implicaciones que adelantábamos en la introducción y que representábamos en un diagrama de Venn. Un objetivo era mostrar que $\mathbb{R}$ es el único cuerpo ordenado, salvo isomorfismos, que cumple el axioma del supremo. También hemos visto que los cuerpos arquimedianos son subcuerpos de $\mathbb{R}$. Recíprocamente, los subcuerpos de $\mathbb{R}$, como en ellos $\mathbb{Z}$ no está acotado, son arquimedianos.

En cuanto a los cuerpos no arquimedianos, hemos comentado que ni $\mathbb{Q}(X)$ ni $\mathbb{R}(X)$ cumplen la CSC. Por supuesto, sus completados por sucesiones si cumplen la CSC, al igual que las SLf. Sin embargo, ninguno de estos cumple el PIE.

Podemos volver a mostrar el diagrama de la introducción completándolo con ejemplos. Para ello, nos falta mencionar ejemplos de cuerpos ordenados que cumplan el PIE y no sean arquimedianos. Por un lado, tenemos que Mendelson [16] cita un ejemplo de Borovskii [22] . Por otro lado, Shelah [23], aplicando la teoría de modelos, ha demostrado que todo cuerpo ordenado se puede extender a uno que cumpla el PIE, lo que implica que hay cuerpos no arquimedianos que cumplen el PIE. Mostramos el referido diagrama en la figura 4.

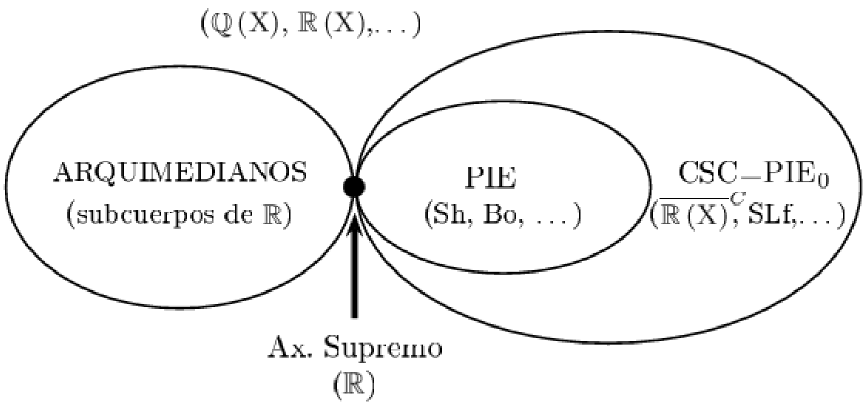


Figura 4. Relaciones en los cuerpos ordenados entre el PIE, la CSC, la propiedad arquimediana y el axioma del supremo, incluyendo ejemplos.

Propiedad de la intersección finita Para terminar, vamos a comentar las relaciones de la *propiedad de la intersección finita* con el PIE y el axioma del supremo.

Una colección de conjuntos $\mathcal{S}$ se dice que tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita y no vacía de $\mathcal{S}$ tiene intersección no vacía. Por ejemplo, toda sucesión de intervalos encajados posee dicha propiedad. Se demuestra (ver páginas 106 y 113 de Hrbacek *et al.* [9]) que en conjuntos completamente ordenados y densos el axioma del supremo es equivalente a que toda colección de intervalos cerrados y acotados con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía (también lo podemos demostrar siguiendo la técnica empleada en los apartados 3.2 y 3.3).

Además, no es difícil ver que el PIE se cumple si y solamente si toda sucesión de intervalos cerrados y acotados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Veámoslo, de una sucesión de intervalos cerrados y acotados $\{I_n\}$ se pueden construir la sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados $J_n = \bigcap_{m=1}^{n} I_m$. Observemos que $\bigcap_{m=1}^{n} J_m = J_n = \bigcap_{m=1}^{n} I_m$ por lo que si la sucesión $\{J_n\}$ tiene intersección no vacía, tampoco será vacía la intersección de los $\{I_n\}$. En cuanto al recíproco, ya hemos comentado que las sucesiones de intervalos cerrados y encajados tienen la propiedad de la intersección finita.

Por otra parte, sabemos que el axioma del supremo no es equivalente al PIE, es decir, la diferencia entre colección y sucesión de intervalos se hace vital. Así, los cuerpos que cumplen el PIE y no son arquimedianos, con lo cual no cumplen el axioma del supremo, cumplen que toda sucesión de intervalos cerrados y acotados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía, y, a su vez, deben tener alguna colección no numerable de intervalos cerrados y acotados con la propiedad de la intersección finita cuya intersección sea vacía.

referencias

1. Russ S, Trlifajová K. Bolzano's measurable numbers: are they real? arXiv [Internet]. 2018 May 6 [consultado 3 noviembre 2025];arXiv:1805.02237. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.02237

2. Bennabi S, Nicolay S. A construction of the real numbers based on Weierstrass's approach. Rocky Mountain Journal of Mathematics. [Internet] 2024 Abr 19. Disponible en: https://projecteuclid.org/journals/rmjm/rocky-mountainjournal-of-mathematics/DownloadAcceptedPapers/230518-Nicolay.pdf

3. Van der Waerden BL, Artin E, Noether E. Algebra: Volume I. Nueva York: Springer; 1991. [Traducción de Blum F y Schulenberger JR].

4. Artmann B. The Concept of Number: From Quaternions to Monads and Topological Fields. Chichester: Ellis Horwood Limited; 1988. [Traducción y material adicional de Griffiths HB].

5. Jech T. Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded. Berlin: Springer; 2003.

6. Feferman S. The Number Systems: Foundations of Algebra and Analysis. New York: Chelsea Publishing Company; 1989.

7. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden; 1960. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-322-98548-4

8. Dedekind R. ¿Qué son y para qué sirven los números? Madrid: Alianza Editorial; 2014. [Traducción e introducción de Ferreirós J].

9. Hrbacek K, Jech TJ. Introduction to Set Theory. 2da ed. New York: Marcel Dekker, cop.; 1984.

10. Suppes P. Axiomatic Set Theory. New York: Dover Publications; 1972.

11. Goldrei DC. Classic Set Theory: For Guided Independent Study. London: Chapman and Hall; 1996.

12. Potter MD. Sets: An Introduction. Oxford: Clarendon Press; 1990.

13. Harrison J. Theorem Proving with the Real Numbers. London: Springer; 1998.

14. Ayres F. Algebra moderna. México: McGra w-Hill; 2003. [Traducción y adaptación de Castaño JM con la colaboración de Robledo Moncada E].

15. Hilbert D. On the Concept of Number. En: Ewald WB, editor. From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics. Oxford University Press; 1996. p. 1089-95.

16. Mendelson E. Number Systems and the Foundations of Analysis. New York: Academic Press; 1973.

17. Aguiló Fuster R. Consideraciones sobre cuerpos ordenados y cuerpos reales maximales. Collectanea Mathematica [Internet]. 1968; 19(3): 143-54. Disponible en: https://raco.cat/index.php/CollectaneaMathematica/article/view/57724

18. Sikorski R. On algebraic extensions of ordered elds. Ann Soc Polon Math [Internet]. 1950; 22: 173-84. Disponible en: https://rcin.org.pl/publication/44432#description

19. Hauschild J. Cauchyfolgen höheren Typus in angeordneten Körpern. Z Math Logik Grundlagen Math. 1967; 13: 55-66.

20. Cohen L W, Ehrlich G. The Structure of the Real Number System. New York: D. Van Nostrand; 1963.

21. Lang S. Algebra. Madrid: Aguilar; 1971. [Traducción de Ancochea M].

22. Borovskii YE. The independence of the archimedean axiom. Uspehi Mat. 1956; 11: 161-7.

23. Shelah S. Quite complete real closed fields. Isr J Math [Internet]. 2004 Dic; 142: 261-72. Disponible en:https://doi.org/10.1007/BF02771536

Agradezco al profesor Pedro Luis Gómez (Universidad Politécnica de Cartagena) su atenta lectura y las sugerencias que mejoraron la calidad de este documento, así como al profesor Luis J. Alías (Universidad de Murcia) su motivación para publicar este trabajo y sus recomendaciones sobre los canales de publicación.

Colaboradores, fondos y apoyo:
El autor declara que la investigación fue realizada de manera independiente, financiada con recursos propios y sin contar con apoyo institucional ni financiero externo.

José Manuel Reyes Andrés
Independiente
ppreyesa@yahoo.es