Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

The origins of geometry: from pragmatic necessity to the apodictic search

Luis Cornelio Recalde
Universidad del Valle

Diana Marcela Murillo
Universidad del Valle

Received: November 10, 2016 Accepted: December 26, 2016

Pag. 99-108

Abstract

This article addresses some aspects about the urgent need to demonstrate in geometry. Starting from a historical epistemological analysis, it is supported the idea that the passage from pragmatic geometry of the pre-Hellenic civilizations to the emerging need the Greeks had to demonstrate geometry was not an instant change, but flourished as an amalgam of philosophical, geometric, and spiritual concepts. It is intended that the reflections can serve as input for theoreticians in mathematic education and for teachers, as a reference to raise intervention strategies in the classroom.

Keywords: geometry, proof, abstraction, experience.

Los orígenes de la geometría: de la necesidad pragmática a la búsqueda apodíctica

Resumen

En este artículo se abordan algunos aspectos en torno a la emergencia de la necesidad de demostrar en geometría. A partir de un análisis histórico epistemológico, se sustenta la idea de que el paso de la geometría pragmática de las civilizaciones prehelénicas, al surgimiento de la necesidad de demostrar de los griegos, no fue un cambio instantáneo, sino que floreció como una amalgama de concepciones filosóficas, geométricas y espirituales. Se busca que las reflexiones puedan servir de insumo para los teóricos de la educación matemática y para los docentes, como referencia para plantear estrategias de intervención en el aula.

Palabras clave: geometría, demostración, abstracción, experiencia.

1 Introducción

Estudios realizados en diferentes contextos muestran que el proceso de enseñanza de la geometría en la básica, media y primeros semestres de la universidad, ha seguido las directrices del modelo pedagógico tradicional, en el cual el docente sigue un protocolo rígido y limitado: presentación de la teoría (a cargo del docente), desarrollo de ejemplos y planteamiento de ejercicios. En general, esta metodología produce obstáculos cognitivos que impiden encontrar las líneas de conexión entre lo concreto y lo abstracto, conduciendo el pensamiento por la línea operativa. El estudiante sólo cultiva la capacidad de manipular representaciones visuales, dejando por fuera la visualización abstracta, la argumentación y la justificación formal, propias de la geometría como rama de las matemáticas.

El problema de fondo es que ni los mismos docentes tienen conocimiento, ni de la naturaleza de los objetos geométricos ni de sus propiedades formales. En general confunden los conceptos geométricos con sus representaciones. Esta situación hace que el docente no tenga posibilidades reales de plantear situaciones didácticas que lleven al estudiante a entender la necesidad de demostrar muchos procedimientos matemáticos que la intuición y la representación figurativa les muestran como correctos.

El objeto de este artículo es mostrar que a través de la Historia de las Matemáticas se puede aportar en esta dirección. El análisis histórico epistemológico permite visualizar la manera en que se fue construyendo la evolución de la experiencia empírica a la experiencia abstracta. Entre lo práctico y lo apodíctico.

La historia nos muestra que en principio, la experiencia y la intuición desempeñaron un rol preponderante en la formulación de diversos resultados y procedimientos matemáticos. Sin embargo, a medida en que las situaciones se tornaban complejas y no se podía dar respuestas, a través de la experiencia, hubo necesidad de construir un universo de objetos abstractos con una dinámica propia. En ese escenario, no bastaba con corroborar a partir de casos particulares; fue necesario recurrir a la demostración.

2 El origen pragmático de la geometría

En general se plantea que la geometría surge fundamentalmente del salto de unas prácticas de medición empíricas de los egipcios y babilonios, a unas formas abstractas de los griegos. Como si los griegos hubiesen allanado el camino hacia lo abstracto sin adeudar nada a sus antecesores. Como si de pronto, por algunas circunstancias especiales, los griegos vieran la necesidad de poblar la geometría de un universo de objetos de carácter abstracto. Objetos puros del pensamiento, desligados de la "vulgar" empiria, sin referencia con problemas concretos, anteponiendo, así, de manera abrupta, la experiencia trascendente, *noein*, a la experiencia profana, *doxa*.

En particular, se argumenta que si bien los egipcios y babilonios poseían un extenso conjunto de resultados geométricos y aritméticos, su uso se limitaba a asuntos prácticos. Sin embargo, algunos analistas sustentan que en algunos desarrollos de los egipcios y babilonios se pueden vislumbrar, no sólo huellas de una experiencia práctica, sino que constituye una génesis importante de la experiencia trascendente. No es difícil mostrar, por ejemplo, que en la construcción de las pirámides egipcias hubo necesidad de desplegar una geometría que va más allá del simple transporte de ángulos rectos y segmentos. Los palacios, templos y pirámides revelan figuras geométricas hechas con una precisión tan enorme que aún hoy serían de difícil construcción. También se evidencia el manejo de relaciones ligeramente abstractas: el área de cada triángulo de la pirámide es igual al cuadrado de la altura; las razones de altura, inclinación y base guardan relaciones con el "segmento áureo" en unos casos y con el radio de un círculo respecto al decágono inscrito, en otros. Estos son elementos que dejan translucir huellas de una experiencia trascendente; huellas primarias de una experiencia geométrica abstracta, cuya autenticidad se supone que sea griega.

De esta forma, a pesar de no poseer los documentos suficientes que nos expliquen la manera como concebían las matemáticas, es seguro que en edificaciones tan imponentes han debido utilizar planos y modelos a escala; ingredientes básicos del origen de la geometría según Michel Serres.

En su libro *Los Orígenes de la Geometría*, Michel Serres plantea que el paso hacia una geometría de objetos abstractos no fue ni lineal ni sencillo. La geometría surgió a partir de múltiples elementos de causalidad en los cuales se combinan vertientes heterogéneas que van de lo abstracto a lo concreto y viceversa. La geometría fue el producto del aporte de diversos entornos culturales en períodos largos de tiempo. En particular, la geometría euclidiana no fue establecida directamente por Euclides, sino que corresponde al producto de una variada amalgama de filósofos, astrónomos y pensadores quienes contribuyeron en la demarcación del método y en la formulación de algunos de los teoremas y construcciones presentes en los *Elementos*.

3 La emergencia del razonamiento deductivo

Los egipcios y babilonios recurrían a herramientas inductivas para generar hipótesis que eran consideradas como proposiciones verdaderas. No obstante, al establecer una hipótesis a partir de un razonamiento inductivo es imprescindible demostrar que ésta no es sólo un elemento en común, dado que la experiencia no basta para establecer propiedades verdaderas [21].

Fue tal la importancia que egipcios y babilonios le confirieron a sus resultados, que esta geometría técnica pasó de la clase ilustre a permear en la sociedad de ambas civilizaciones. Sin embargo, como toda civilización, los egipcios y babilonios fueron golpeados por crisis económicas que dificultaron el desarrollo de la geometría, no se sabe con certeza si de no existir dichas crisis en ambas culturas hubiese surgido la necesidad de demostrar, pero lo que si es cierto, es que de acuerdo a los papiros y tablillas cuneiformes, ambas geometrías manejaban ideas geométricas tan brillantes que, a lo mejor, de forma lenta, habrían desembocado en la necesidad de demostrar.

Pero estas situaciones no detuvieron el desarrollo de la geometría, puesto que nuevos personajes se interesaron en ésta ciencia. Lejos de los aspectos pragmáticos se preocuparon por indagar sobre el porque de las propiedades geométricas, buscando generalizaciones a partir de cadenas de razonamiento en lugar de inferencias empíricas. Entre éstos personajes se destacan los oriundos de las tierras acariciadas por las aguas del mar mediterráneo: los antiguos griegos de las islas jónicas.

4 Los teoremas de Tales

Tales de Mileto fue señalado como uno de los iniciadores de la Geometría abstracta. Sin embargo, las motivaciones primarias de Tales fueron en la resolución de problemas prácticos, como el clásico problema de calcular la altura de las pirámides de Egipto. Tales entendió que debía incorporar un procedimiento que le permitiera, con base en los datos concretos, apropiarse de aquello que era imposible de manera directa. Para ello, Tales identificó una relación directa entre los triángulos concretos que se forman por la sombra de la pirámide y la sombra de una vara. Tales dedujo, entonces que se puede hablar de una relación de semejanza o mejor de proporcionalidad. Lo grande se puede conocer cuando se conozca lo pequeño; esta es la ley fundamental de la escala y de la teoría de modelos. Esto mismo lo replica para calcular la distancia de los barcos a la costa.

Tales diseñó un camino indirecto que le permitió acceder a lo inalcanzable a partir de los sentidos; construyó un modelo o un módulo que le permitió alcanzar lo inaccesible; tal como lo plantea Michel Serres:

> Es necesario, dicen, pasar de la práctica a la teoría, por una astucia de la razón, imaginar un sustituto de estas longitudes a las que mi cuerpo no puede acceder, la pirámide, el sol, el navío en el horizonte, la otra orilla del río. La matemática sería el circuito de estas astucias. Esto nos lleva a subestimar el alcance de las actividades prácticas, ya que en definitiva, el circuito consiste en pasar del tacto a la vista, de la medida por el contacto a la medida por la mirada. Aquí teorizar es ver, como bien sabe la lengua griega[1].

Esto enmarca una de las características fundamentales del pensamiento griego. Se trataba de trascender lo empírico a través de un cuerpo teórico, que en últimas, era el llamado a responder las preguntas o, dicho de manera más moderna, a validar los razonamientos. El ideal griego de ciencia libre se perfila aquí con gran nitidez. La geometría pasa a ser entonces un medio teórico que permite conocer más allá de lo sensible.

Desde una perspectiva moderna, se reconoce que Tales contribuyó a la Geometría con cinco resultados netamente teóricos:

1. El círculo es bisecado por su diámetro.
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. Si dos rectas se interceptan en un punto, los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4. El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
5. Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivos iguales y el lado comprendido entre ellos, también, entonces ambos triángulos son iguales.

Aunque se carece de pruebas que constaten que efectivamente Tales formuló estos teoremas y los demostró, a través del estudio de diversos libros relacionados con su vida y obra se puede afirmar que Tales de Mileto comenzó a cambiar la perspectiva de la geometría antigua; en lugar de asumir como ciertos los resultados que percibía a través de sus sentidos, buscaba ponerlos a prueba pasando de la experiencia cotidiana a la instauración de la experiencia trascendental, gobernada por la reflexión profunda de los objetos geométricos en el mundo inteligible y la exigencia de demostrar sus resultados[2].

5 El paso a la abstracción pitagórica

Aproximadamente sesenta años después del nacimiento de Tales de Mileto, nació en la isla griega Samos el filósofo, geómetra y matemático, Pitágoras. Respecto a su vida se

1 Serres, M. Ce que Thales a vu au pied des pyramides, en *L'Interference*. Minuit De.; París, 1972.
2 Para más detalles ver [17]
3 Para los pitagóricos el uno representaba la unidad el origen de todo lo conocido y desconocido, mientras que el número era el conjunto de unidades. Razón por la cual para los pitagóricos el uno no era un número.

conoce poco, pero se sabe que fundó una de las escuelas más influyentes en la época, la escuela pitagórica. Esta escuela, más allá de constituir un grupo en el cual se intercambiaban

conocimientos frente a las matemáticas era una hermandad rodeada de misterios y secretos; a tal punto que de acuerdo con diversos historiadores de la matemática, seguían estrictas reglas en torno al espiritualismo; al lugar de reunión sólo podían ingresar miembros de la escuela y guardaban con recelo sus hallazgos matemáticos; incluso tenían una firme creencia en la relación entre los números[3] y la vida, llegando a establecer que el número estaba ligado a todo lo conocido y lo desconocido.

Además de interesarse por las relaciones entre los objetos geométricos, los pitagóricos se aventuraron a definir el punto, uno de los objetos más controversiales de la geometría como aquella unidad que tiene posición. También consideraban que el punto, la recta, la superficie y los sólidos eran análogos a los números uno, dos, tres y cuatro respectivamente, en correspondencia con su pensamiento *todo es número*[4].

Para los pitagóricos, existe una relación indisoluble entre el alma, la religión, la vida y el número. A diferencia de los babilonios y egipcios, los pitagóricos empiezan a pensar una geometría abstracta, a estudiar las relaciones entre lo numérico y lo geométrico en un mundo alejado de toda particularidad, estableciendo una sólida filosofía frente a la vida, el universo y las matemáticas; sin embargo, la aparición de las magnitudes inconmensurables los hizo entrar en crisis. Los pitagóricos estaban convencidos de que todas las magnitudes eran conmensurables; esto es, dadas dos magnitudes A y B, existen n y m, números [naturales], tales que $nA = mB$. Sin embargo, esto es imposible si se compara el lado del cuadrado y su diagonal. Este es uno de los resultados más importantes de los pitagóricos[5]. Para demostrarlo, los pitagóricos hicieron uso del método de reducción al absurdo.

El método de Reducción al Absurdo se basa en dos de los principios primarios de la racionalidad occidental: *el principio de no contradicción* y *el principio del tercero excluido*. Mediante el primer principio, se prohíbe la coexistencia de un enunciado y su negación; mediante el segundo, sólo se acepta que una proposición sea verdadera o falsa de forma excluyente. De esta manera, en el método de Reducción al Absurdo se asume verdadera la negación de la tesis a demostrar; si se llega a una contradicción, como de antemano se ha considerado la consistencia, la proposición será falsa, lo cual significa que su negación, es decir la proposición a demostrar, es verdadera.

De esta forma, al adoptar los pitagóricos una nueva estructura demostrativa basada en la reducción al absurdo, establecieron una nueva manera de determinar propiedades geométricas que involucraban procesos infinitos. Con los pitagóricos se dio paso a una nueva era de la geometría; el razonamiento deductivo empezó a permear e influir en la civilización griega. Como se menciona en el sumario de Proclo citado en [12]:

Pythagoras transformed the study of geometry into a liberal education, examining the principles of the science from the beginning and probing the theorems in an immaterial

4 Para más detalles ver [11]

5 Dos magnitudes AA y BB son conmensurables si existen dos números naturales kk y mm tal que $kA = mBkA = mB$

and intellectual manner. [Pitágoras transformó el estudio de la geometría en una educación liberal, estudiando los principios de la ciencia desde el comienzo y probando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual].

6 El mundo sensible, el mundo inteligible y la geometría en Platón

Hasta el momento con Tales y los pitagóricos ha surgido la necesidad de demostrar, pero se carece de parámetros que indiquen los elementos con los cuales se debe demostrar y los fundamentos que debe poseer la geometría para constituirse como una ciencia que involucre la experiencia trascendental y se establezca como un cuerpo sólido independiente de la métrica, la aritmética y la espiritualidad.

Si bien los pitagóricos dieron un paso hacia la abstracción de la geometría, no se tienen documentos en los cuales podamos reconocer su filosofía completa. Los informes que tenemos se deben fundamentalmente a Platón y Aristóteles, los dos filósofos más influyentes en la historia de occidente.

Platón se planteó la posibilidad de establecer algunas leyes sobre las operaciones del pensamiento, y delinear algunas reglas formales independientes del contenido de los objetos sobre los que se razona. Platón exponía sus reflexiones a través de diálogos entre personajes que se cuestionaban sobre algún tema en particular. En uno de sus *Diálogos* [15] presenta “la alegoría de la caverna” para explicar la relación entre el mundo sensible y el mundo inteligible. A diferencia de los pitagóricos, Platón consideró que existe una separación entre los objetos empíricos y los objetos ideales; los objetos del mundo inteligible son puros, son verdaderos y perfectos, mientras que los objetos que percibimos son sólo sombras y representaciones imperfectas de los objetos puros. Bajo esta perspectiva, los caballos, las manzanas, los trazos que representan números y objetos geométricos no son más que representaciones defectuosas de los objetos inmaculados de un mundo ideal. La única manera de acceder a los objetos matemáticos es a través del conocimiento, quitando las cadenas que atan al hombre a ver las sombras de los objetos puros para pasar a la construcción del intelecto que lo conduzca fuera de la caverna del mundo sensible.

A diferencia de los babilonios y egipcios, quienes generalizaban resultados geométricos a través de casos particulares, para Platón no es posible partir de características comunes de casos finitos para obtener una verdad universal de los objetos abstractos, sólo se accede al conocimiento puro de la ciencia a través del discurso compuesto de afirmaciones verdaderas, a través de la demostración. Para Platón, la ciencia se compone de afirmaciones verdaderas establecidas a partir de consideraciones verdaderas; es decir, la verdad se logra a partir de cadenas de verdades. En ese sentido, no se puede demostrar que algo es verdadero a través de consideraciones falsas.

A partir de este momento, se empieza a esculpir el rol de la demostración en geometría. Con Tales y los pitagóricos se evidenció la necesidad de demostrar, pero Platón, en lugar de realizar pruebas de resultados geométricos, establece las bases del razonamiento deductivo y la demostración directa, independientemente de la ciencia a la cual se haga referencia.

7 Aristóteles: un teórico de la demostración

Si bien Aristóteles está de acuerdo con Platón en que los objetos geométricos viven en un mundo ideal diferente al empírico, la relación de dependencia y origen es contraria. En Platón, el mundo de lo sensible es una sombra del mundo ideal que lo precede. Para Aristóteles, los objetos geométricos se derivan de los sensibles a través de operaciones profundas y muy articuladas. Este proceso se denomina la *aphairesis*. En la *Metafísica*[6], una de sus obras insignes, Aristóteles plantea que la geometría despoja a los objetos de sus cualidades sensibles y se dedica al estudio de los objetos en lo abstracto. Bajo esta perspectiva, si bien la geometría surgió de las necesidades prácticas del hombre, dado que la práctica no era suficiente para estudiar todas las propiedades de los objetos geométricos y establecer sus relaciones, fue necesario llevar estos objetos a un universo abstracto prescindiendo de sus propiedades sensibles.

En su tratado de lógica *El Organón*, Aristóteles establece que un silogismo es un tipo de razonamiento compuesto por una premisa mayor, una premisa menor y una conclusión que se deduce de las dos primeras; sin embargo, no en todo silogismo las premisas y la conclusión son verdaderas. De esta manera, la demostración se constituye como un tipo de silogismo que conduce a proposiciones verdaderas[7]. Si bien esta idea de demostración parece dejar de lado todo el procedimiento implícito en la demostración de una proposición, en realidad, se está estableciendo que una proposición debe conducir a una conclusión verdadera, independientemente del método que se utilice.

Para Aristóteles, la geometría, como ciencia demostrativa, debe satisfacer los tres principios básicos anteriormente enunciados: *identidad*, *tercio excluido* y *no contradicción*. Adicionalmente, establece que la geometría requiere de tres elementos: axiomas que constituyan los principios básicos y no requieran de demostración; definiciones que expliquen qué son algunos de los objetos geométricos y proposiciones a demostrar, que instauren las propiedades de dichos objetos y sus relaciones. Estos principios y elementos, formulados sin obedecer a ninguna ciencia demostrativa en particular, se convertirían en el canon de la geometría para la construcción, establecimiento y criterio de aceptación de los diversos cuerpos construidos en torno a ésta, desde la geometría euclidiana hasta la posterior axiomatización y formalización de la geometría por David Hilbert a través de los *Grundlagen der Geometrie* en el siglo XIX.

A partir de estos principios e ideas en torno a la demostración, retomando algunas concepciones de geómetras y filósofos anteriormente mencionados, Aristóteles construye un nuevo paradigma de demostración que sintetiza y complementa ideas anteriores en torno a lo que significa una ciencia de la demostración. Se empieza a concebir a la geometría como un cuerpo sólido, deductivo y axiomático, compuesto de axiomas, definiciones y proposiciones que obedecen a los tres principios de la lógica aristotélica: *identidad*, *tercio excluido* y *no contradicción*.

6 [1]
7 Para mas detalles ver [2]

8 Los *Elementos* de Euclides

Debido a la trascendencia disciplinaria y social de los *Elementos* de Euclides, se suele pensar que fue la única obra en la formulación de todos los principios y resultados de la época; sin embargo, existen referentes históricos, como los de Proclo, que muestran la existencia de este tipo de propuestas en épocas anteriores.

Entendiendo el vocablo "elementos", como los principios y resultados básicos que rigen una ciencia o disciplina y, considerando la importancia que tenía la geometría para los griegos, no es de extrañar que otros pensadores se hayan aventurado a establecer los *elementos* de la geometría. Luis Vega, en su introducción a los *Elementos* de Euclides[8], destaca obras similares de Hipócrates de Quios, Teudio de Magnesia y un enigmático León. La más antigua corresponde a Hipócrates de Quios, quien escribió unos *elementos* para la geometría, en los cuales, si bien no plantea principios básicos, tiene en cuenta proposiciones ya demostradas, además de incluir una demostración de la cuadratura de las lúnulas que surgió en el camino hacia la cuadratura del círculo mientras que Teudio estructura unos *elementos* con un cuerpo deductivo más sólido y preciso. Por otra parte, se sabe de la existencia de un personaje, llamado León, que estableció unos *elementos* en los cuales se estudiaba el carácter apodíctico de algunas proposiciones geométricas.

9 Conclusiones

En primer lugar, es conveniente advertir que la búsqueda del origen de la geometría tiene múltiples vertientes y matices. Diversos historiadores de la ciencia, como Michel Serres [19], sostienen que no existe el origen de la geometría, sino los orígenes de la geometría.

Uno de los aspectos que movilizó el paso de una geometría práctica a una geometría apodíctica tiene relación con las contingencias del mundo empírico. El mundo sensible nos engaña, es limitado y cambia en el tiempo y en el espacio. Esto plantea la necesidad de construir un parapeto teórico que dé cuenta de las verdades inmutables. El modelo hipotético deductivo, cuyo epicentro reposa en la necesidad de demostrar, constituye la salida de los antiguos griegos a esta problemática.

El surgimiento de la necesidad de demostrar no sólo presenta un cambio en las formas en que se abordan los objetos geométricos, sino que también brinda una visión de la evolución del carácter ontológico de la geometría. Para los antiguos griegos, las técnicas usadas en la geometría no eran meras herramientas dadas por los dioses para ayudarles en su quehacer cotidiano, sino que, como plantea Juan García en su introducción filosófica a los *Elementos* de Euclides[9], en la geometría se sintetiza la triple unicidad, establecida por la unicidad del ser en lo abstracto; la unicidad de la verdad óntica, asociada a la manera en que el ser manifiesta sus propiedades y la verdad ontológica, que es la manera en que el ser se muestra ante el entendimiento. Cada una de estas unicidades da cuenta de las implicaciones filosóficas y cognoscibles de considerar la geometría como un ente abstracto.

8 corresponde a la introducción de [8].
9 corresponde a la introducción de [19].

Una discusión sobre el proceso de abstracción y generalización sobre la naturaleza de los objetos matemáticos sería conveniente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Es importante que el mismo docente conozca que la evolución de la geometría se da en un ir y venir entre lo concreto y lo abstracto. Pero, que en un momento determinado, los objetos de la geometría cobran independencia del mundo empírico y se rigen por una legislación especial, que hoy se conoce como el método axiomático. En ese universo, los objetos geométricos cumplen unas propiedades especiales, muy diferentes a las propiedades de los objetos empíricos. Son objetos puros del pensamiento regidos por los tres principios de la lógica aristotélica: la consistencia, la identidad y el tercero excluido.

El conocimiento de estos aspectos seguramente ayudará al docente a no confundir el objeto geométrico con sus representaciones y le permitirá diseñar estrategias didácticas tendientes a que los estudiantes puedan construir un puente entre los objetos concretos del mundo sensible y los objetos abstractos del universo geométrico.

Referencias bibliográficas

[1] Aristóteles. (1994). *Metafísica*. Madrid, España: Editorial Gredos.

[2] Aristóteles. (2011). *Tratados de Lógica: El Organón*. México D.F., México: Editorial Porrúa.

[3] Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.

[4] Carrión, J., (1988). *La geometría en la génesis y desarrollo de las Matemáticas*. (Tesis para optar al título de Licenciado en Matemáticas). Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

[5] Chace, A. B., Bull, L. S., Manning, H. P., & Archibald, R. C. (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Ohio: Mathematical Associaton of America.

[6] Esteva, C. (1955). El pensamiento prefilosófico. *Revista de la Universidad de México*, *10-11*, 4 y 14.

[7] Euclides. (1991). *Elementos* (M. L. Puertas, & L. Vega, Trans.). Madrid, España: Gredos.

[8] Euclides. (1992). *Elementos de Geometría*. México D, F, México: Universidad Nacional Autónoma de México.

[9] Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías* (S. Blumovicz, & S. Alonso, Trans.). México, D. F., México: Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.

[10] Gow, J. (1968). *A short history of greek Mathematics*. New York: Chelsea Publishing Company N.Y .

[11] Heath, T. (1921). *A history of greek Mathematics*. Oxford at the Clarendon press.

[12] Heath, T. (1968). *The thirteen books of The Elements, vol. I.* Cambridge.

[13] Mas, S. (2003). *Historia de la filosofía antigua. Grecia y el helenismo*. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

[14] Mora, M. (2014). *Tres etapas de la demostración en la Historia de las Matemáticas*. (Tesis para optar al título de Licenciado en Matemáticas), Universidad Veracruzana, Xalapa, México.

[15] Platón. (1987). *Diálogos: Menon, Fedon, Teeteto, Alegoría de la caverna*. Bogotá, Colombia: El Áncora Editores.

[16] Recalde, L. (2010). Los filósofos presocráticos: La naturaleza como fuente de experiencia abstracta. *Revista de Ciencias*, *14*, 85-99.

[17] Recalde, L. (2015). *Lecciones de Historia*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. En Prensa.

[18] Serres, M. (1993). *Les origenes de la géométrie: Tiers livre des foundations*. Paris, Francia: Flammarion.

[19] Serres, M. (1998). *Historia de las Ciencias* (R. Herrera, L. Puig, I. París, M. López, & J. García, Trans.). Madrid, España: Cátedra. 2 Ed

[20] Zuleta, E. (1996). *Lecciones de filosofía. Lógica y crítica*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Dirección de los autores

Luis Cornelio Recalde
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia.
luis.recalde@correounivalle.edu.com

Diana Marcela Murillo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali - Colombia.
di_marce95@hotmail.com