Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

Escobar's Conjecture for the First Steklov Eigenvalue on n-ellipsoids

Óscar Andrés Montaño Carreño
Universidad del Valle

Received: November 1, 2016 Accepted: December 22, 2016

Pag. 55-61

Abstract

Let M an ellipsoid in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, if the second fundamental form π satisfies $\pi(v,v) \geq k\,|v|^2$ on ∂M, $k > 0$, then the first Steklov eigenvalue $\nu_1(M)$ satisfies the inequality $\nu_1(M) \geq k$. Equality is obtained only if M is the ball of radius $\frac{1}{k}$. This result verifies Escobar's conjecture for n- ellipsoids.

Keywords: Steklov eigenvalue, ellipsoid, second fundamental form.

Conjetura de Escobar para el primer valor propio de Steklov sobre n-elipsoides

Resumen

Sea M un elipsoide en $\mathbb{R}^n$; $n \geq 3$, si la segunda forma fundamental π satisface $\pi(v,v) \geq k\,|v|^2$ sobre ∂M, $k > 0$, entonces el primer valor propio de Steklov $\nu_1(M)$ satisface la desigualdad $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se obtiene si y sólo si M es la bola de radio $\frac{1}{k}$. Este resultado verifica la conjetura de Escobar para n-elipsoides.

Palabras y frases clave: Valor propio de Steklov, elipsoide, segunda forma fundamental.

1 Introducción

Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana n-dimensional, compacta, conexa y con frontera suave ∂M. El problema

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \text{ en } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu\varphi \text{ sobre } \partial M, \end{aligned} \tag{1}$$

donde ν es un número real, se conoce como el problema de Steklov [4]. Los valores propios para este problema son los mismos que los valores propios del operador Dirichlet-Neumann [4] y son a menudo llamados valores propios de Steklov [6].

El primer valor propio no cero $\nu_1(M)$ es conocido como el primer valor propio de Steklov y está caracterizado variacionalmente por

$$\nu_1(M) = \text{mín}\left\{R[\varphi] : \int_{\partial M} \varphi d\sigma = 0, \varphi \in C^\infty(\overline{M})\right\}, \tag{2}$$

donde $R[\varphi] = \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma}$ es llamado cociente de Rayleigh. Para la bola n-dimensional unitaria $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, el primer valor propio de Steklov es $\nu_1(B) = 1$.

Al igual que en el problema de Dirichlet y de Neumann, en el problema de Steklov se han hecho estimativos geométricos para el primer valor propio. Para dominios acotados y simplemente conexos en el plano xy, en 1954, Weinstock [7] demostró que $\nu_1 \leq \frac{2\pi}{L}$, donde L representa el perímetro de la curva frontera, con igualdad si y sólo si el dominio es un círculo. En 1970, para dominios convexos en el plano, Payne [5] demostró que $\nu_1 \geq k$, donde k es el valor mínimo de la curvatura sobre la frontera del dominio. Posteriormente, en el año 1997, Escobar [1] generalizó el resultado de Payne para variedades bi-dimensionales con curvatura de Gauss no negativa, reemplazando k por la curvatura geodésica k_g de la frontera. El resultado de Escobar es el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea $(\overline{M}, g)$ una 2-variedad Riemanniana compacta con frontera. Asumamos que M tiene curvatura Gaussiana no negativa, K y que la curvatura geodésica k_g de la frontera de M, verifica la desigualdad $k_g \geq k > 0$. Entonces, el primer valor propio no cero del problema de Steklov, $\nu_1(M)$ satisface $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se tiene solamente para la bola euclidiana de radio $\frac{1}{k}$.*

En el mismo artículo, para dimensiones mayores, Escobar obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.2. *Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana compacta con frontera y dimensión $n \geq 3$. Asumamos que $Ricci(g) \geq 0$ y que la segunda forma fundamental π satisface $\pi(v, v) \geq k\,|v|^2$ sobre ∂M, $k > 0$. Entonces*

$$\nu_1(M) > \frac{k}{2}. \tag{3}$$

Dos años después, Escobar [2] enuncia la siguiente conjetura:

1.1 Conjetura de Escobar

Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana compacta con frontera y dimensión $n \geq 3$. Asumamos que $Ricci(g) \geq 0$ y que la segunda forma fundamental π satisface

$$\pi(v, v) \geq k\,|v|^2$$

sobre ∂M, con $k > 0$. Entonces, el primer valor propio de Steklov satisface la desigualdad $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se obtiene solamente para la bola euclidiana de radio $\frac{1}{k}$.

La conjetura análoga para $n = 2$ fue probada por Payne [5] para dominios en el plano y por Escobar [1] para 2-variedades con curvatura Gaussiana no negativa. Montaño en [3] demostró que la conjetura es cierta para métricas rotacionalmente invariantes en la bola n-dimensional.

El propósito de este artículo es demostrar la Conjetura de Escobar para n-elipsoides, es decir, demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.3. *Sea M un elipsoide en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, si la segunda forma fundamental π satisface $\pi(\upsilon, \upsilon) \geq k\,|\upsilon|^2$ sobre ∂M, $k > 0$, entonces el primer valor propio de Steklov $\nu_1(M)$ satisface la desigualdad $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se obtiene si y sólo si M es la bola de radio $\frac{1}{k}$. Este resultado verifica la conjetura de Escobar para n-elipsoides.*

La demostración se hará en tres secciones de la siguiente manera: en la primera sección, encontramos una mejor cota inferior para la segunda forma fundamental; en la segunda sección, estimamos el cociente de Rayleigh para elipsoides y en la tercera sección, demostraremos la conjetura de Escobar para n -elipsoides.

2 Segunda forma fundamental

En esta sección encontramos la mejor cota inferior para la segunda forma fundamental sobre el n-elipsoide. Sea

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 1\}\,,\ x = (x_1, ..., x_n), \tag{4}$$

donde

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{a_i})^2,\ a_1 \geq ... \geq a_n > 0,\ n \geq 3. \tag{5}$$

La frontera de M, ∂M, es el elipsoide n-dimensional

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 1\}\,. \tag{6}$$

Dado que

$$\begin{aligned} N &= (N_1, ..., N_n) \\ &= \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \\ &= (\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{|\nabla F|}, ..., \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{|\nabla F|}) \\ &= (\frac{F_1}{|\nabla F|}, ..., \frac{F_n}{|\nabla F|}) \end{aligned}$$

es un campo unitario exterior y normal a ∂M la segunda forma fundamental en x evaluada en $\upsilon \in \mathfrak{X}(\partial M)$ (Campos tangentes a ∂M) está dada por

$$\pi(\upsilon, \upsilon) = \langle D_\upsilon N, \upsilon \rangle\,,$$

donde $\langle \nabla F, \upsilon \rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\pi(\upsilon,\upsilon) &= \langle D_\upsilon N, \upsilon \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla N_i, \upsilon \rangle \, e_i, \upsilon \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \left(\frac{\partial_{ij} F}{|\nabla F|} - \frac{\langle \nabla F, \nabla(F_j) \rangle \, F_i}{|\nabla F|^3} \right) e_j, \upsilon \right\rangle e_i, \upsilon \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{F_{ij}}{|\nabla F|} - \frac{\langle \nabla F, \nabla(F_j) \rangle \, F_i}{|\nabla F|^3} \right) \upsilon_i \upsilon_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{F_{ij}}{|\nabla F|} \upsilon_i \upsilon_j \\
&= \frac{\langle (HF)(x)\upsilon, \upsilon \rangle}{|\nabla F|}.
\end{aligned}$$

En nuestro caso, tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi(\upsilon,\upsilon) &= \frac{\langle (HF)(x)\upsilon, \upsilon \rangle}{|\nabla F|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\upsilon_i^2}{a_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^4}}} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\upsilon_i^2}{a_1^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_n^2 a_i^2}}} \\
&= \frac{a_n}{a_1^2} \langle \upsilon, \upsilon \rangle .
\end{aligned}$$

Tenemos, entonces, la desigualdad:

$$\pi(\upsilon,\upsilon) \geq \frac{a_n}{a_1^2} |\upsilon|^2 . \tag{7}$$

La igualdad se obtiene en $x = a_n e_n$ y $\upsilon = e_1$, es decir, $\frac{a_n}{a_1^2}$ es la mejor cota inferior para π.

3 Cociente de Rayleigh

Dada $\varphi : M \to \mathbb{R}$ suave, comparamos el cociente de Rayleigh $R[\varphi]$ sobre el elipsoide M definido en (4) con el cociente de Rayleigh $R[\varphi \circ f]$ sobre la bola B, donde

$$f(u) = (a_1 u_1, a_2 u_2, ..., a_n u_n), a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0$$

y

$$B=\left\{u\in\mathbb{R}^n:|u|^2<1,u=(u_1,...,u_n)\right\}. \tag{8}$$

Con el fin de simplificar los cálculos, introducimos las siguientes variables y conjuntos:
$x=(x_1,...,x_n)$, $w=(x_1,...,x_{n-1})$, $u=(u_1,...,u_n)$, $z=(u_1,...,u_{n-1})$, $x=f(u)$.

$$E=\left\{w\in\mathbb{R}^{n-1}:F(w,0)<1\right\}. \tag{9}$$

$$U=\left\{z\in\mathbb{R}^{n-1}:|z|^2<1\right\}. \tag{10}$$

Con la notación precedente, tenemos:

$$\begin{aligned}
R[\varphi]&=\frac{\int\limits_M|\nabla\varphi|^2\,dx}{\int\limits_{\partial M}\varphi^2 d\sigma_x}\\
&=\frac{\int\limits_M|\nabla\varphi|^2\,dx}{2\int\limits_E\varphi^2(w,x_n(w))\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(\frac{\partial x_n}{\partial x_i})^2}dw}\\
&=\frac{\int\limits_B\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i})^2a_1...a_n du}{2\int\limits_U\varphi^2\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_n^2}{a_i^2}(\frac{\partial u_n}{\partial u_i})^2}a_1...a_{n-1}dz}\\
&=\frac{\int\limits_B\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i})^2du}{2\int\limits_U\varphi^2\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}(\frac{\partial u_n}{\partial u_i})^2}dz}\\
&\geq\frac{a_n}{a_1^2}\frac{\int\limits_B\sum\limits_{i=1}^n(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i})^2du}{2\int\limits_U\varphi^2\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(\frac{\partial u_n}{\partial u_i})^2}dz}\\
&=\frac{a_n}{a_1^2}\frac{\int\limits_B|\nabla\varphi|^2\,du}{\int\limits_{\partial B}\varphi^2 d\sigma_u}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$R[\varphi]\geq\frac{a_n}{a_1^2}\frac{\int\limits_B|\nabla\varphi|^2\,du}{\int\limits_{\partial B}\varphi^2 d\sigma_u}. \tag{11}$$

4 Conjetura de Escobar para *n*-ellipsoids

Sea ψ primera función propia asociada al valor propio $\nu_1(M)$ y a tal que $\varphi = \psi + a$ satisfaga

$$\int_{\partial B} \varphi \circ f d\sigma_u = 0. \tag{12}$$

Dado que ψ es función propia, entonces $\int_{\partial M} (\psi + a) d\sigma_x = aA$, con $A = \int_{\partial M} d\sigma_x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\nu_1(M) &= \frac{\int_M |\nabla \psi|^2 \, dx}{\int_{\partial M} \psi^2 d\sigma_x} \\
&= \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 \, dx}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_x - a^2 A} \\
&\geq \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 \, dx}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_x}
\end{aligned}$$

De (11) se deduce que:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 \, dx}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_x} &\geq \frac{a_n}{a_1^2} \frac{\int_B |\nabla \varphi|^2 \, du}{\int_{\partial B} \varphi^2 d\sigma_u} \\
&\geq \frac{a_n}{a_1^2} \nu_1(B) \\
&= \frac{a_n}{a_1^2}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\nu_1(M)$ es mayor o igual a la mejor cota inferior para π. La igualdad se obtiene si y sólo si $a_1 = a_n$. En tal caso, M es una bola de radio a_1 y $\nu_1(M) = \frac{1}{a_1}$. La Conjetura de Escobar se satisface para n-elipsoides.

Referencias bibliográficas

[1] Escobar, J. F. (1997). The Geometry of the First Non-Zero Steklov Eigenvalue, *Journal of Functional Analysis*, *150*, 544-556.

[2] Escobar, J. F. (1999). An isoperimetric inequality and the first Steklov Eigenvalue, *Journal of functional analysis*, *165*, 101-116.

[3] Montaño, O. A. (2013). The Stekloff problem for rotationally invariant metrics on the ball, *Revista Colombiana de Matemáticas*, *47*(2), 181-190.

[4] Montaño, O. A. (2013). Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov en el espacio euclideo,*Revista de Ciencias*, *17*(2), 95-103.

[5] Payne L. E. (1970). Some Isoperimetric Inequalities for Harmonic Functions. *SIAM J. Math. Anal.*, *1*, 354-359.

[6] Steklov, M. W. (1902). Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique, *Ann. Sci. École Norm*, *19*, 445 - 490.

[7] Weinstock, R. (1954). Inequalities for a classical eigenvalue problem. *J. Rational Mech. Anal.*, *3*, 745 - 753.

Dirección del autor

Óscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
oscar.montano@correounivalle.edu.co