



LA MODELACIÓN DE LA VARIACIÓN, UN ANÁLISIS DEL USO DE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE BIOLOGÍA, FÍSICA Y QUÍMICA DE SECUNDARIA

Constanza Arias Hernández **Luis Hernando Leal** **Martha Lilia Organista Rodríguez**
Universidad Universidad Universidad
Pedagógica Nacional Pedagógica Nacional Pedagógica Nacional

Recibido: octubre 26, 2011 Aceptado: diciembre 19, 2011

Pág. 93-128

Resumen

Este artículo presenta un análisis de las características y usos de las gráficas cartesianas que sirven para la modelación de la variación presente en las gráficas cartesianas de los textos de Biología, Física y Química de secundaria, mediante cuatro ejes fundamentales: tipo de fenómenos que se ocupan del estudio de la variación, caracterización de los elementos de las gráficas cartesianas, tipo de uso de las gráficas y el tratamiento dado a la variación. Además se presentan diferentes referentes teóricos que permitieron construir una aproximación socioepistemológica que incluye sus cuatro componentes, un análisis **epistemológico**, asuntos **didácticos**, la dimensión **cognitiva** y la componente **social**, se incluye una revisión de los derroteros planteados en los Lineamientos Curriculares y Estándares Curriculares de Matemáticas y Ciencias naturales, sobre las competencias que debe desarrollar todo ciudadano en relación al estudio de fenómenos que impliquen cambio y variación. En segunda instancia se incluyen tres aspectos: se expone la metodología que se implementó, se presentan las categorías de análisis adoptadas y por último, se relaciona y justifica el corpus documental empleado para desarrollar éste trabajo. Finalmente se muestran los resultados y conclusiones obtenidos al aplicar las categorías de análisis establecidas, primero para cada una de las áreas, y después un análisis cruzado de categorías para las tres áreas al mismo tiempo.

Palabras claves: representación gráfica cartesiana, elementos informativos internos y externos, usos, modelación, variación y cambio.

Abstract

This article presents an analysis of the characteristics and uses of the Cartesian graphs useful for modeling the variation present in the Cartesian graphics of high school Biology, Physics, and Chemistry textbooks, via four fundamental axes: type of phenomena that concern the study of the variation, characterization of the elements of the Cartesian graphics, type of use of the graphics and the treatment of the variation. In addition, we present different theoretical references that permitted constructing a socioepistemological approach that includes its four components, an

epistemological analysis, **didactic** issues, the **cognitive** dimensión, and the **social** component; we include a review of the paths posed in the Curricular Guidelines and Curricular Standards of Mathematics and Natural Sciences, on the skills every citizen must develop in relation to the study of phenomena implying change and variation. In a second instance, three aspects are included: the methodology implemented is exposed, the adopted analysis categories are presented, and lastly, the documentary corpus used to develop this work is related and justified. Finally, we show the results and conclusions obtained when applying the analysis categories established, first for each of the areas, and then a crossed analysis for the three areas at the same time.

Keywords: Cartesian graphic representation, internal and external data elements, uses, modeling, variation and change.

1 Introducción

Dentro de las propuestas de innovación planteadas por el Ministerio de Educación en la Serie de Lineamientos Curriculares de Matemáticas se encuentra el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la Educación Básica, lo cual presupone: “superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propias matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas” (MEN, 1998). En este sentido, resulta oportuno analizar el estudio que los textos de Biología, Química y Física proponen sobre los fenómenos que involucran cambio en las variables que intervienen y su respectiva cuantificación.

Aunque existen varios sistemas de representación asociados a la variación, este estudio se centrará en las gráficas de tipo cartesiano, dada su importancia en la vida diaria como formas de comunicación científica y como herramientas para el trabajo didáctico, además del uso masivo que se hace de ellas en los diferentes campos del conocimiento y ámbitos de la vida cotidiana.

Este artículo presenta la revisión y el planteamiento de cuatro ejes fundamentales a estudiar: tipo de fenómenos que involucran variación, caracterización de los elementos de las gráficas cartesianas, tipo de uso de las gráficas y el tratamiento dado a la variación. También se hace alusión a diferentes referentes teóricos que permitieron construir una aproximación socioepistemológica que incluye sus cuatro componentes: un análisis epistemológico de la variación y del uso de las gráficas; una revisión de tipos de fenómenos, elementos característicos de las gráficas cartesianas y usos de éstas en el estudio de la variación, como asuntos didácticos; una descripción del tratamiento dado a la variación como parte de la dimensión cognitiva; y finalmente, como parte de la componente social, se incluye una revisión de los derroteros planteados en los Lineamientos Curriculares y Estándares Curriculares de Matemáticas y Ciencias naturales, sobre las competencias que debe desarrollar todo ciudadano en relación al análisis de fenómenos que impliquen cambio y variación.

Después se incluye la metodología que se implementó, las categorías de análisis adoptadas y por último, se relaciona y justifica el corpus documental empleado para desarrollar éste trabajo y se muestran los resultados obtenidos al aplicar las categorías de

análisis establecidas, primero para cada una de las áreas, y después un análisis cruzado de categorías para las tres áreas al mismo tiempo y finalmente se incluyen las conclusiones y recomendaciones.

2 Formulación del problema

Mientras que en algunos casos los libros de texto de matemáticas utilizados en la Educación Básica y Media no exponen argumentos que resalten la importancia de analizar la modelación de la variación y simplemente asumen que su estudio es necesario para comprender las matemáticas avanzadas, Cordero (2006), plantea que “La modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, tiene que ser una práctica plasmada como la argumentación de la situación en cuestión”.

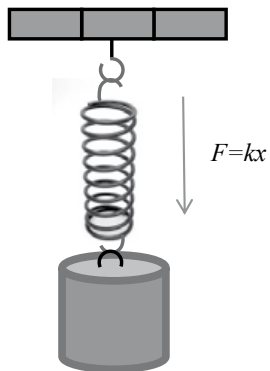
Por ejemplo, en el texto de matemáticas Soluciones 8 (2007) de editorial Futuro, al presentar el concepto de función lineal, aunque se vale de un fenómeno físico como es el del estiramiento del resorte, primero presenta el modelo algebraico $F = Kx$, a partir del cual propone la representación gráfica, siendo ésta un resultado de la ecuación, como se observa en el discurso “La representación gráfica de la función f es una recta que pasa por el origen”; el autor no se detiene a analizar la gráfica y en seguida presenta una definición de función lineal y los talleres que sugiere el autor están encaminados a elaborar una tabla de valores dada una función de la forma $f(x) = mx$, a partir de la cual se construye la representación gráfica.

Función lineal

La fuerza (F) que actúa sobre un resorte, para poder producir en él un alargamiento x , está dada por la expresión:

$$F = kx$$

donde x es un alargamiento producido, y k , una constante que depende del tipo de material

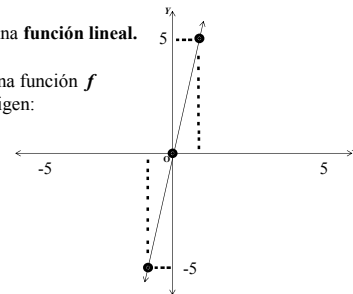


Para una banda de caucho con una constante de elasticidad $k = 5 \frac{N}{m}$, la fórmula correspondiente se puede escribir como:

$$\begin{array}{cc} \text{fuerza} & \text{alargamiento} \\ \downarrow & \downarrow \\ f(x) & 5x \end{array}$$

Esta expresión corresponde a una **función lineal**.

La representación gráfica de una función f es una recta que pasa por el origen:



Función lineal

Es una función de forma $y = f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero.

Se define de \mathbb{R} en \mathbb{R} , por lo cual su gráfica es una recta que pasa por el origen del sistema coordenado.

Ilustración 1 Ejemplo de modelo matemático.

Un análisis de la modelación de la variación, y su representación gráfica, muestra que tiene que ver con diversos temas de la matemática, como la proporcionalidad, las ecuaciones, igualdades, el álgebra y, en general, el pensamiento variacional. Lo cual pone de manifiesto que se trata de un tema central de la matemática. Al observar detenidamente los textos de Biología, Física y Química se detecta que hay poca relación entre las gráficas que modelan la variación con otras ramas del conocimiento como las ciencias naturales.

En la enseñanza - aprendizaje de las ciencias, además de dominar diversos conceptos, se hace necesario desarrollar la habilidad de representar dichos conceptos y al mismo tiempo de interpretar diversos tipos de representación; “en particular las representaciones gráficas, ya que son como una forma de comunicación científica y una herramienta para el trabajo didáctico” (García 2005). Es decir que, teóricamente las gráficas que se presentan en los textos escolares, deben tener entre sus objetivos, el ayudar a construir el concepto de diferentes objetos matemáticos. Además, dado que las representaciones gráficas trascienden la escuela y se posicionan en todos los campos del conocimiento y por tanto, de la sociedad (economía, medicina, política, etc), el leerlas e interpretarlas acertadamente es una necesidad del ciudadano de hoy y una responsabilidad de la escuela dar respuesta a dicho requerimiento.

En términos generales, los Estándares Curriculares de Ciencias Naturales plantean la necesidad de que los estudiantes de secundaria identifiquen y usen adecuadamente el lenguaje propio de las ciencias, comuniquen oralmente y por escrito diferentes tipos de información, utilizando esquemas, gráficas, tablas y ecuaciones aritméticas y/o algebraicas. El objetivo final es que los estudiantes sean capaces de formular múltiples explicaciones del mundo que les rodea con base en el reconocimiento de los fenómenos cotidianos y en el uso de las matemáticas para analizar y comprender las teorías y modelos científicos existentes. Por otra parte, dado que la modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, al permitirle al estudiante, observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, y revisar, el interés por este proceso se ha incrementado en los tiempos recientes en todas las áreas del conocimiento.

Dado que los libros de texto resultan ser una de las principales herramientas de apoyo de los docentes, el presente trabajo pretende explorar sobre la forma en que las gráficas contribuyen en la resignificación de conceptos matemáticos que trascienden a la escuela y sobre el uso de las gráficas en la modelación de la variación en algunos textos de Física, Química y Biología para Secundaria en la ciudad de Bogotá. En una primera y somera revisión, se encontró que varios de los libros de texto consultados, utilizan la gráfica como una herramienta para ilustrar la idea del concepto que quieren incorporar.

En los textos de Biología, Física y Química de editorial Santillana se presenta un número significativo de gráficas en la sección de actividades y talleres en las que se cuestiona o pregunta al estudiante sobre lo ocurrido en un fenómeno dado, para lo cual éste debe comprender qué significa la gráfica y cómo debe interpretar tanto la información textual, gráfica y numérica allí consignada, para que pueda responder y resignificar el conocimiento que se quiere transmitir de determinada ciencia. Es así como se ve la necesidad de establecer conexiones entre las matemáticas con otras ciencias para la construcción del conocimiento.

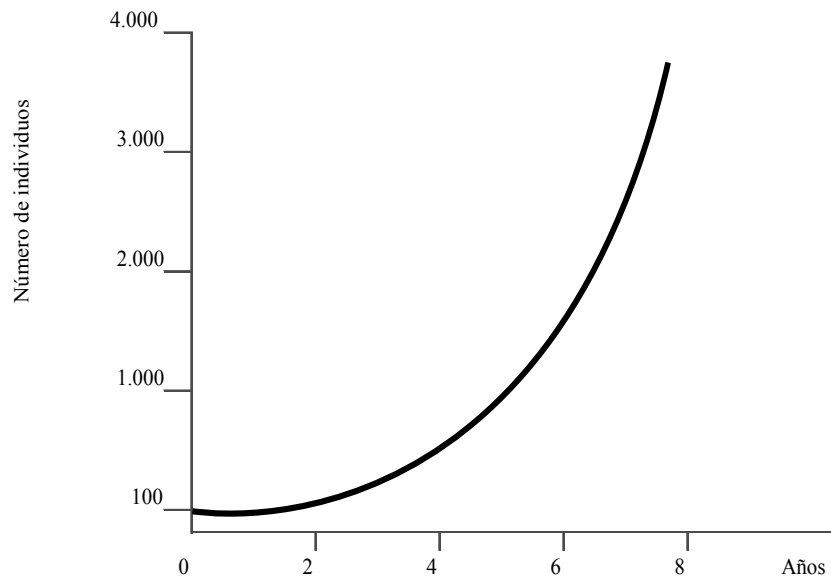


Ilustración 2 Ejemplo de gráfica sin expresiones matemáticas.

En el texto *Nuevas Ciencias Naturales 8* (2007) de editorial Santillana, se presenta la anterior gráfica para introducir el concepto de crecimiento exponencial, de manera ilustrativa a criterio nuestro; porque mientras que en matemáticas se presenta el mismo concepto como la relación entre dos variables (x y $f(x)$) mediante una expresión de tipo algebraico, con unas características y condiciones específicas; aquí solamente se da una idea visual del comportamiento de las variables, sin incluir la expresión que relaciona el número de individuos con el tiempo transcurrido.

En el texto *Nueva Física 11* (2008) de editorial Santillana, muestran la siguiente gráfica que ilustra la relación existente entre un movimiento armónico simple (en ausencia de fricción) y un movimiento armónico amortiguado (con presencia de fricción) pero no sugieren el modelo matemático que emerge a partir de estas gráficas, ni tampoco se explora cómo sucede la variación.

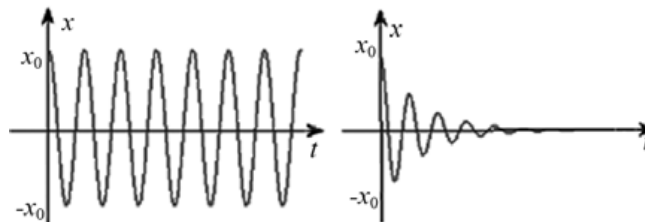


Ilustración 3 Ejemplo de ausencia de modelo matemático

La situación ideal sería que la teoría estudiada en la clase de matemáticas ayudara a comprender los fenómenos abordados en ciencias y que el estudio de éstos a su vez apoyara y le dieran sentido a los conceptos matemáticos. Es decir que el estudio que pretendemos hacer puede originarse en la hipótesis de que existe una falta de interconexión entre matemáticas y ciencias naturales, y que ello puede acarrear dificultades en el proceso de la construcción social del conocimiento, pues al estudiante no se le presentan los conocimientos de las diferentes áreas de manera holística sino desagregada.

La pregunta central de la investigación es: ¿Cuáles son las características de las gráficas cartesianas presentes en los textos de Biología, Física y Química, usados en los colegios de la ciudad de Bogotá, editados entre los años 2003 a 2009 y cómo se usan para estudiar el cambio y la variación presente en diferentes tipos de fenómenos?

El Uso de las Gráficas en los Libros de Texto de Matemáticas

Aunque el análisis de los textos, no sustituye la observación de la enseñanza en el aula, si puede proporcionar información para la construcción de instrumentos de evaluación o para mejorar la enseñanza; puede ser un recurso para los profesores, proporcionándoles ideas para enriquecer su actividad docente en el aula y mostrando algunas dificultades que podrían tener los estudiantes. En los cursos de Educación Básica las representaciones son herramientas matemáticas que permiten a los estudiantes emitir juicios y tomar decisiones, por lo tanto se hace necesario estudiar el papel de las gráficas de los textos en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

La Modelación de la Variación

Según los Lineamientos Curriculares la tendencia de los currículos de matemáticas debería favorecer la relación entre las matemáticas y otras ciencias (Biología, Física y Química) para la construcción del conocimiento en el conjunto de las áreas, logrando que la interacción entre éstas favorezca la resignificación de conceptos matemáticos y de otras ciencias.

La modelación favorece la construcción del conocimiento ya que no es una herramienta, sino que en sí misma es “una construcción del conocimiento”. Cuando se habla de “el uso de las gráficas” se hace referencia a un tipo de modelación y a una práctica social que favorece el desarrollo de una matemática funcional que será valorada por el estudiante ya que le permitirá comprender los conceptos matemáticos y a ver la funcionalidad de la matemática no sólo en ella sino en los diferentes contextos donde se desenvuelva.

3 Marco conceptual: aproximación socioepistemológica

La socioepistemología se ha caracterizado como aquella epistemología que tiene como tarea modelar las prácticas sociales que den cuenta de contenidos matemáticos específicos y explica cómo se da la construcción del conocimiento matemático a partir de las prácticas sociales que le dan origen y que son fuente del saber matemático. (Cantoral y Farfán, 2003, referido en García, E., García, E., Yutub, I., 2007). Las prácticas sociales articulan un conjunto de prácticas asociadas a un saber y se caracterizan por su función normativa, determinando así “lo que hace hacer lo que se hace”.

La socioepistemología se interesa por modelar el papel de la práctica social en la producción del conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica. Este enfoque reporta caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber. Plantea la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. La Socioepistemología se puede caracterizar como una aproximación sistémica, que permite el estudio de

interacciones de cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: La naturaleza epistemológica, la dimensión social, el plano cognitivo y los aspectos didácticos, (Cantoral y Farfán, 2003 citado en García, E., Yutub, I., 2007), las cuales interactúan unas con otras, afectándose mutuamente. En la misma investigación, este modelo lo comparan con una “mesa de billar” con cuatro “bolas”, que representan las componentes citadas anteriormente, el “taco” representa el interés de la investigación, que decide sobre qué dimensión colocar la atención (qué bola golpear), en un primer momento, para posteriormente dar luz sobre la forma en cómo van a interactuar (bolas golpeándose entre sí por la influencia de la primera).

4 Componente epistemológica

Esta componente se relaciona propiamente con el contenido matemático estudiado desde las perspectivas de su construcción y su funcionamiento; así, la epistemología se convierte en una epistemología de prácticas que pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo se constituye el objeto de conocimiento?

Teniendo en cuenta que el presente trabajo tiene por objetivo analizar cómo se modela la variación en los textos de Ciencias, se incluye a continuación una aproximación epistemológica de la evolución del concepto de variación y del uso de las gráficas.

- *Análisis Epistemológico de la Variación*

En el análisis que realizaron Castiblanco, A y Moreno, (2004), acerca de la variación y el cambio, a la luz de la historia de las matemáticas, mencionan cómo en la prehistoria es posible observar algunos fenómenos que evidencian un acercamiento a las ideas de variación y cambio, como los cambios de la posición de las ramas de los árboles a causa del viento, el empleo de técnicas y herramientas de caza y pesca que ayudaron a impulsar desarrollos tecnológicos y simbólicos encaminados a promover un lenguaje gestual y el verbo icónico llevando a manifestarse en sistemas de representación más complejos como figuran en tablillas de arcilla. En el 5000 A.C. Los babilonios utilizaban el álgebra retórica, cuyas soluciones de ecuaciones cuadráticas, cúbicas y bicuadráticas, o sistemas de ecuaciones con dos incógnitas se presentaban verbalmente. Ya en el 3100 a 322 A.C. la civilización egipcia, presenta avances algebraicos en la solución verbal de ecuaciones lineales; progresiones aritméticas y geométricas con pocos símbolos que se revelaban en problemas de la vida cotidiana como repartos de panes, grano o animales, cantidad de granos para producir cantidades de cerveza o cantidad de granos de una calidad para obtener lo mismo con granos de otra calidad; estimación de comida de animales, estimación de la duración del año; observación de cambios y constantes de la estrella Siro llevaron a consolidar un calendario de 365 días: 12 meses de 30 días más 5 días.

Youschkevitch (1976, citado por Cordero y Flores, 2007), reporta que en la antigüedad se hacen estudios de dependencia entre dos cantidades. Aparece el uso de tablas sexagesimales, de cuadrados y raíces cuadradas, de cubos y raíces cúbicas. Se elaboran empíricamente tablas de efemérides del sol, la luna y los planetas. Los griegos determinan leyes sencillas de acústica, como la relación entre longitudes de cuerdas y los tonos de las notas emitidas. En la época de Alejandría, se desarrolla la trigonometría de las cuerdas de una circunferencia de radio fijo.

Los científicos de la edad media se interesan por examinar fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. En esta época es importante el núcleo científico de Oxford y París donde retoman en muchos de sus estudios las matemáticas griegas para desarrollar análisis cuantitativos del movimiento no uniforme. En el siglo XIII mediante el análisis de fenómenos como el calor, la luz, y la velocidad, encuentran que se pueden presentar en varios grados de intensidad y que a su vez podían estar relacionadas con el tiempo o la cantidad de materia que eran cantidades de “extensión”. En este siglo aparece el concepto de “cantidad variable” que se asimilaba a un grado de cualidad; también se presenta un acercamiento al concepto de velocidad instantánea y aceleración que puede ser una aproximación inicial a la idea de función. Uno de los representantes de este núcleo científico es Nicolás Oresme quien analizó fenómenos que cambian a partir de aproximaciones geométricas, lo que lo lleva a desarrollar su teoría sobre latitudes de las formas que se apoya en el uso de segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía. Dentro de estas consideraciones, todo lo medible era una cantidad continua. Oresme representó la velocidad del móvil durante el tiempo, donde los puntos del segmento horizontal eran los instantes de tiempo (era la longitud) y los segmentos perpendiculares correspondían a la velocidad en ese instante (era la latitud). Identificó tres formas de representación del movimiento: la primera la uniformemente uniforme de latitud constante; la segunda la uniformemente diforme, de variación constante de latitud y la deformemente deforme, donde había diversidad de latitudes.

Durante este período Youschkevitch (1976, citado por Cordero y Flores, 2007) declara que las nociones se expresaban mediante formas geométricas y mecánicas. La dependencia entre dos cantidades se definía por una expresión verbal de la propiedad específica o por medio de una gráfica y se perfeccionaron métodos de tabulación iniciando con algunas funciones trigonométricas importantes.

En la época del siglo XV al siglo XVIII se consolidan los estudios del proceso de variación y cambio con el análisis del movimiento, la intensidad luminosa y la intensidad de calor. Se construye el álgebra simbólica con el uso de letras para las cantidades y los signos para las operaciones que eran utilizados en la resolución de ecuaciones y para las demostraciones. En esta época nace la geometría analítica y el cálculo infinitesimal, se avanza en las primeras definiciones para el término función. Uno de los científicos destacados en esta época es Galileo, quien hace un análisis del movimiento por medio de la experimentación y la invención de algunos instrumentos; En esta época Galileo se cuestionaba sobre las relaciones que se establecen entre distancias y tiempos de caídas de los cuerpos. Así, se eliminan las preguntas sobre las causas reales que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones (medir es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos (Dolores, 2006) lo que implica cuantificación. Además Galileo propone una relación funcional entre las variables que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria, lo cual supone la introducción del tiempo como variable independiente.

Antes del siglo XVII se consideraba que una función era una expresión verbal, una tabla, una gráfica o una comparación de carácter cinemático. En *La Géométrie* de Descartes, introduce la variación a la matemática en forma de magnitudes variables y la plantea en forma dual: como coordenada variable de un punto que se mueve a lo largo de una curva y en la forma de un elemento variable del conjunto de números. Las magnitudes son representadas geoméricamente y lo continuo proviene del continuo

físico. Las magnitudes variables son abstracciones que representan algo que cambia continuamente (Dolores, 2000), parece que una función en x e y es una forma de expresar una dependencia entre dos cantidades variables. Se consideraba la relación entre números y no entre “cantidades” y era posible una representación por medio de fórmulas. Con Descartes nace la geometría analítica para interpretar curvas y superficies por medio de ecuaciones.

Fermat en el año 1637 tuvo en cuenta los principios fundamentales del método de las coordenadas, tomó un eje de referencia y sobre éste un punto fijo que correspondía al origen de segmentos variables.

Newton hace una interpretación geométrica-cinemática sobre los conceptos de análisis matemático; consideraba a las magnitudes matemáticas descritas por movimientos continuos (Wuaissing, citado por Dolores, 2000). Tiene en cuenta el tiempo como argumento, analiza variables dependientes; las cantidades continuas tienen velocidad de cambio. Para el cálculo infinitesimal utiliza el método de las fluxiones y de series infinitas. Una fluxión de x , era la velocidad dada la distancia, que en su cálculo infinitesimal correspondía a la diferenciación y cuando se daba la velocidad se necesitaba hallar la distancia; este problema se refería a la integración.

Leibniz, contemporáneo de Newton, se acercó al concepto de función y analizó las series infinitas. Para él, en la determinación de la tangente a una curva se analizaba la razón de diferencias de las ordenadas y abscisas cuando tienden a cero. A él se debe la representación de diferenciales dx y dy , y del símbolo para la integral \int . Al trabajar con Bernoulli quiso expresar la función como una dependencia, así se supera la concepción cinemática del término variable. Quería expresar “una cantidad compuesta de cualquier manera de una variable y constante”.

En esta etapa moderna, predominan las expresiones analíticas de las funciones y de acuerdo a Youschkevitch (1976, citado por Cordero y Flores, 2007) la latitud y la longitud se podrían tratar como la ordenada y la abscisa.

En el siglo XVIII el análisis matemático empieza a establecerse como rama de las matemáticas ya que no se tiene en cuenta lo geométrico ni lo mecánico, sino que se hace un uso exclusivo del álgebra. En el año 1728 para Bernoulli, la función era una expresión analítica. Éste soluciona la ecuación en derivadas parciales que modela el comportamiento de una cuerda vibrante a través de series infinitas de funciones trigonométricas. Para Euler, en el año 1748, el término constante se refería a una cantidad que tiene siempre el mismo valor y cantidad constante es una cantidad indeterminada o universal; la función de una cantidad variable es una expresión analítica.

Durante este período aparecieron nuevas funciones (las “trascendentes”) que ayudaron a resolver problemas relacionados con la Física (cicloide, catenaria, lemniscata, etc.). Euler lleva más allá la idea de función, considerando como concepto matemático que hasta ese momento era considerado como una herramienta para resolver problemas, generalmente relacionados con la Física. Abre así la posibilidad de estudiar las funciones como objetos matemáticos y de generalizar el concepto de función. La idea de variación se enriquece al integrarla con conceptos de continuidad y de variable como parámetro temporal de dependencia.

En los siglos XIX y XX hay nuevas definiciones: función, límite, integral, magnitud variable, número real. Con ello las magnitudes variables son llevadas a un nivel de abstracción mayor; ahora un rango de variación de una variable como un conjunto de números reales, por lo que una variable numérica, x , “es cualquier cosa que puede tomar distintos valores numéricos” (Wuissing, citado por Dolores, 2000). El concepto de continuidad se volvió un concepto matemático abstracto definido en términos de límite. En el siglo XX se establece el análisis funcional donde la variable es la función misma y el concepto de función se relaciona con el concepto de conjunto propuesto por Cantor. Las variables y las funciones pasaron de ser modelos matemáticos que reflejan la variación concreta y las relaciones entre variables, a conceptos matemáticos abstractos distantes de los fenómenos de movimiento que les dieron origen (Dolores 2000).

En este marco epistemológico de la evolución del concepto de variación resulta entonces relevante considerar que el devenir histórico de los conocimientos promueve una conceptualización de la matemática como una ciencia en construcción permanente, dedicada a elaborar conocimientos para resolver problemas, y además tiene en cuenta los procesos dirigidos a demostrar la validez de esos conocimientos y la comunicación de saberes producidos.

Youschkevitch (1976, citado por Cordero y Flores, 2007) acopia estas etapas como un requerimiento para formalizar el concepto de variación continua que provino principalmente de la física y la geometría, es allí cuando nace el concepto de función. Todo momento anterior lo denomina síntoma del concepto de función (Cordero y Flores, 2007). Por tanto se tienen dos momentos de uso de la gráfica: síntoma del uso de la gráfica de la función y uso de la gráfica de la función.

Se destaca el estudio realizado por Oresme, quien usa gráficas diferentes a las gráficas cartesianas (Suárez, 2002; Suárez y Cordero, 2005, citados por CEN, 2006). Él utiliza figuras geométricas (rectángulos y triángulos) para analizar el modo en que las cosas varían. Su idea consiste en que el instante de una cantidad continua es representado por un segmento rectilíneo y que la medida de los instantes es representada por la medida de esos segmentos rectilíneos de instante. Además, considera que toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua. Las figuras mismas representaban la cualidad de la cantidad continua, en ese sentido las figuras geométricas adquirirían un significado global.

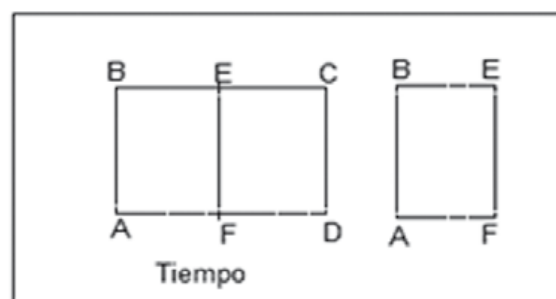


Figura 2.1 Variación uniformemente uniforme

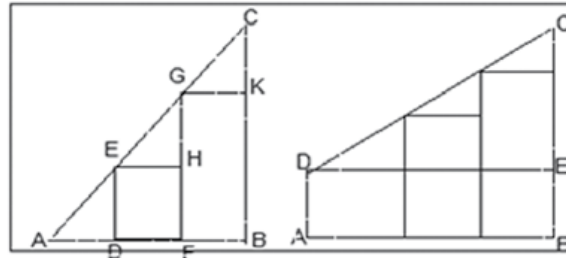


Figura 2.2 Variación uniformemente deforme

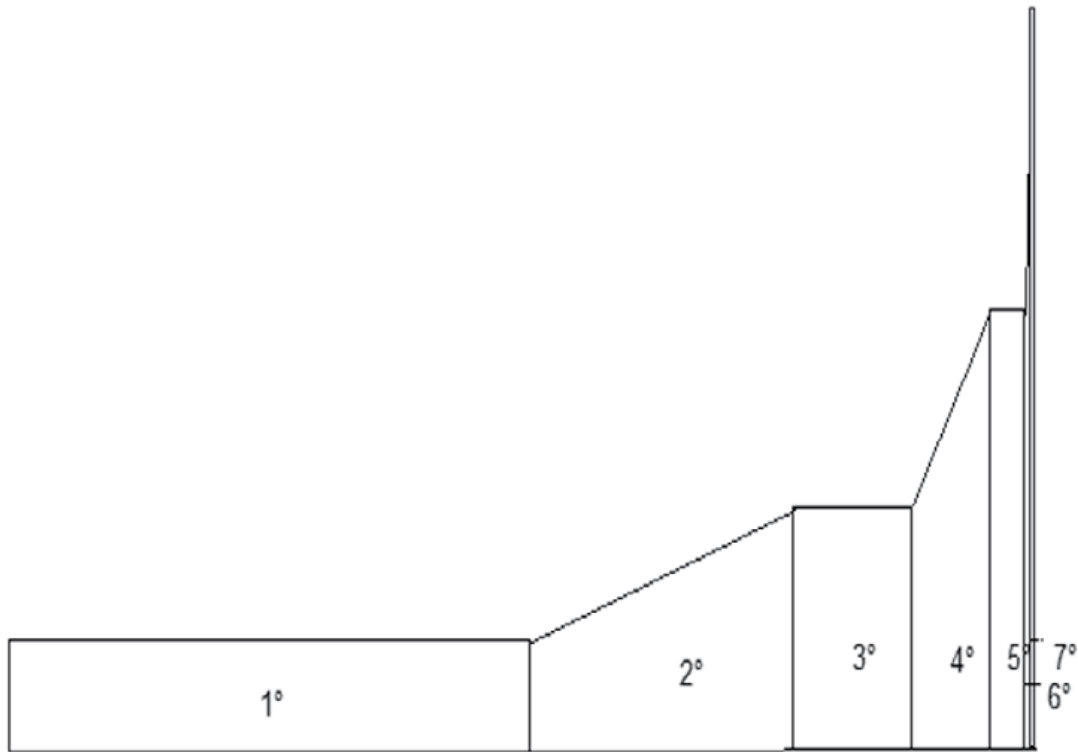


Figura 2.2 Variación deformemente deforme

Ilustración 4 Representaciones gráficas de la Variación según Oresme

Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad. Tal vez por ello, Oresme resignifica las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación: usa un rectángulo para representar una variación uniformemente uniforme (ver Ilustración No 4); un triángulo o trapecio para representar una variación uniformemente deforme (ver Ilustración No 6) y una figura irregular para representar una variación deformemente deforme.

Cordero (2006) afirma que los usos de las gráficas significan que la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable. La graficación, entonces es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, los cuales están ligados a la intuición; en sí misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica transformando al objeto en cuestión, cuando se establecen estrategias didácticas que llevan a un avance conceptual. Tal estatus epistemológico del uso de la gráfica lo ubica, como un producto

material continuo. La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo y para que el continuo no se destruya se requiere lograr un estatus cultural de la argumentación gráfica.

Ahora bien, se puede evidenciar que las preguntas que presenta Dolores (2007) están estrechamente relacionadas con el proceso histórico del concepto de variación; en cuanto a la pregunta **¿qué cambia?**, vemos, como se mencionó, que en la prehistoria se observaba el cambio de posición de las ramas de los árboles a causa del viento, en el 3100 a 322 A.C. la civilización egipcia tenía en cuenta la cantidad de granos para producir diferentes cantidades de cerveza, en la edad media aparece el concepto de “cantidad variable” que se asimilaba a un grado de cualidad, a la par aparece el concepto de velocidad instantánea y aceleración que se puede asociar al concepto de función. Oresme representó la velocidad del móvil durante el tiempo, donde los puntos del segmento horizontal eran los instantes de tiempo (era la longitud) y los segmentos perpendiculares correspondían a la velocidad en ese instante (era la latitud). En la época Galileo se estudiaba sobre las relaciones que se establecen entre distancias y tiempos de caídas de los cuerpos. Se introduce el tiempo como variable independiente.

Newton tiene en cuenta el tiempo como argumento, analiza variables dependientes; En los siglos XIX y XX las magnitudes variables son llevadas a un nivel de abstracción mayor; un rango de variación de una variable como un conjunto de números reales, por lo que una variable numérica, x , “es cualquier cosa que puede tomar distintos valores numéricos”

En relación con la pregunta **¿cuánto cambia?** se advierte que en la antigüedad se cuestionaron al respecto al tratar de determinar la cantidad de granos de una calidad para obtener lo mismo (cantidad de cerveza) con granos de otra calidad, además en el siglo XIII mediante el análisis de fenómenos como el calor, la luz, la velocidad identificaron que se podían dar varios grados de intensidad, y que ésta, se encontraba relacionada con el tiempo o la cantidad de materia que eran cantidades de “extensión”, a su vez Galileo se cuestionaba sobre las relaciones existentes entre distancia y tiempo de caída de los cuerpos.

Atendiendo a la pregunta **¿cómo cambia eso que cambia?**, se manifiesta en la observación de cambios y constantes de la estrella Siro con lo que se consolidó un calendario de 365 días: 12 meses de 30 días más 5 días. Con Nicolás Oresme se identifican tres formas de representación del movimiento: la uniformemente uniforme de latitud constante; la uniformemente diforme, de variación constante de latitud y la deformemente deforme.

Con respecto a la pregunta **¿qué tan rápido cambia eso que cambia?**, Leibniz analizaba la razón de diferencias de las ordenadas y abscisas cuando tienden a cero.

Finalmente, en cuanto al **comportamiento global**, durante el siglo XVIII la idea de variación se enriquece al integrarla con conceptos de continuidad, de variable como parámetro temporal y de dependencia. En los siglos XIX y XX el concepto de continuidad se volvió un concepto matemático abstracto definido en términos de límite. En el siglo XX las variables y las funciones pasaron de ser modelos matemáticos que reflejan la variación concreta y las relaciones entre variables, a conceptos matemáticos abstractos distantes de los fenómenos de movimiento que les dieron origen (Dolores 2000).

- *Epistemología del Uso de las Gráficas.*

Actualmente Suárez y Cordero (2006) utilizan el tratado de Oresme sobre la Figuración de las cualidades, mostrando así una explicación de la transformación del uso de las matemáticas de la época para abordar las situaciones de cambio y variación. Muestran cómo se puede determinar un “uso de las gráficas” asociado a los fenómenos físicos, donde se pueden establecer formas de uso de las gráficas. Esto puede generar argumentos hacia la construcción de justificaciones funcionales sobre el uso de las gráficas, produciendo en el estudiante una concepción de la variación asociada a fenómenos reales de varias ciencias. Se concluye entonces que la Figuración de cualidades es una obra que permite visualizar la idea matemática de función a través del “uso de las gráficas”, aportando elementos importantes para el desarrollo del concepto de variación de manera independiente o paralela al desarrollo del concepto analítico de función. El desarrollo del “uso de las gráficas” sustenta una construcción del conocimiento matemático (Cen 2006) en la que se puede ver integrada la modelación con fenómenos de varias ciencias logrando así la resignificación y afirmación de los conceptos de cambio y variación a través de lo funcional.

Los trabajos de Suárez y Cordero (2006) evidencian cómo la modelación y la graficación son “un medio” para el aprendizaje de las matemáticas y además, son actividades útiles para fines específicos como el aprendizaje de funciones y la aplicación de conocimientos desde las situaciones reales hasta los objetos matemáticos. Presentan tres momentos epistemológicos de la figuración de las cualidades de Oresme que les proporcionaron argumentos sobre la conveniencia didáctica de desarrollar un “uso de las gráficas” en una situación de modelación del movimiento, pero que también se puede extrapolar a la modelación de la variación en fenómenos presentados en libros de textos de Física, Química y Biología. Estos momentos son:

a. La gráfica antecede a la función: En la figuración de las cualidades se establecen relaciones entre las figuras geométricas y situaciones específicas de variación. Un rectángulo representa situaciones que no varían, luego medio rectángulo representa una situación de cambio que ocurre durante un lapso de tiempo y una figura deforme representa cambios irregulares:

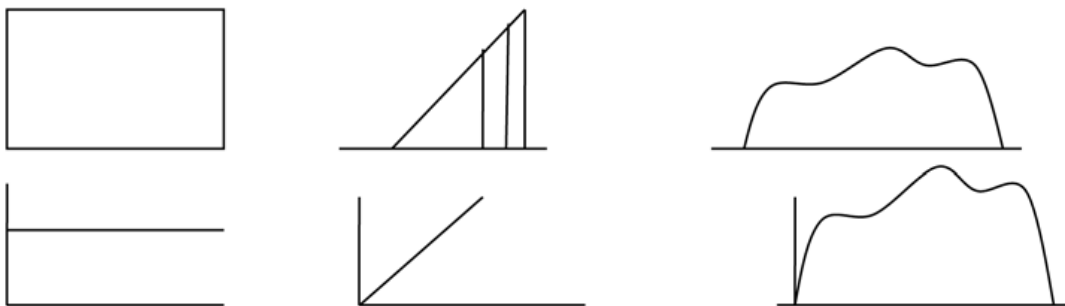


Ilustración 5 *Figuración de las cualidades.*

El contorno de las figuras es similar a las curvas de las funciones analíticas en ejes coordenados. Suárez y Cordero muestran cómo se puede apreciar de esta forma la relación que existe entre la figuración de las cualidades y la etapa inicial de la construcción del concepto matemático de función.

Youshkevitch (1976) identifica a la figuración de las cualidades en la etapa inicial del surgimiento de la “geometría de las relaciones funcionales”; en su presentación de los desarrollos iniciales del concepto de función, dentro del panorama histórico, describe como se observa en los desarrollos de Oresme, la idea matemática de función equivalente a una relación entre variables, sin existir aún la definición como tal de función.

b. La gráfica es argumentativa. La nueva forma de ver las gráficas, produce un funcionamiento nuevo basado en la forma; es de esta manera como la gráfica pasa a ser principalmente argumentativa dado que el estudiante debe plantear explicaciones al analizar el funcionamiento y la forma.

c. El uso de las gráficas tiene un desarrollo. Las figuras geométricas cobran significado en el uso de las gráficas en situaciones de variación; el tiempo como el eje horizontal donde se extienden las intensidades de las cualidades del fenómeno y éstas están representadas por figuras planas o volumétricas. Según Suárez y Cordero (2006) esos elementos configuran un desarrollo del uso de la Figuración de las cualidades. Esos datos epistemológicos caracterizan un uso de las gráficas que depende de las propiedades geométricas para su descripción (razones y medidas) proporcionando una forma y un funcionamiento a la gráfica independiente de la idea de la gráfica como representación de la función.

Es decir que el “uso de las gráficas” se estudia a partir del debate entre el funcionamiento y la forma del uso de las gráficas en la Figuración de las Cualidades. El funcionamiento hace posible la modelación de fenómenos de variación a través de las figuras geométricas en la Figuración de las Cualidades y es éste el que determina las formas y aún otros funcionamientos y nuevas formas, que se irán desarrollando entre ese debate entre el funcionamiento y la forma. Así que el uso de las gráficas en la Figuración de las Cualidades introduce un nuevo funcionamiento de las figuras geométricas asociado a la matemática de las proporciones, de la forma de abordar problemas del movimiento y podríamos decir que también problemas asociados a otros fenómenos.

5 Componente didáctica

Se relaciona con el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, el conocimiento es explicado a través de la reconstrucción de significados que se persiguen como objetivos en los programas de estudio. Esta componente busca dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo se enseña el objeto?

Dado que el presente trabajo pretende estudiar cómo se modela la variación a través de las gráficas cartesianas incluidas en los textos de Ciencias, a continuación se incluyen los referentes conceptuales sobre: clasificación de los diferentes fenómenos abordados en los textos, los elementos característicos de las gráficas cartesianas y los usos que se les da a éstas en la modelación de la variación; ya que se considera que estos tres aspectos son los que precisamente podrían dar cuenta de los contextos que los autores de los textos proponen para enseñar los aspectos relacionados con el cambio y la variación.

Con respecto a los diferentes fenómenos objeto de estudio de las Ciencias, Carrasco (2005), en su investigación Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de

gráficas de variación en el tiempo; indagó sobre las dificultades que presentan los estudiantes para construir, interpretar y trabajar con gráficas de fenómenos de variación que incluyen la variable tiempo, dado que observó que con frecuencia confunden el eje del tiempo con un eje de distancia o la gráfica de la trayectoria del móvil con la gráfica de distancia recorrida en el tiempo, entre otros. Esas dificultades que han mostrado los estudiantes a la hora de reconocer cómo y qué varía y, por lo tanto, para describir el comportamiento de las variables involucradas en una determinada situación, se convierten en obstáculos en su aprendizaje matemático.

Para tal fin, estudió en profundidad tres aspectos: las representaciones de tiempo usadas por los estudiantes en el momento de graficar (a través de actividades enmarcadas dentro de la metodología de una ingeniería didáctica), el aspecto histórico epistemológico de las representaciones que dieron origen a las significaciones matemáticas del tiempo, y un análisis de contenido de las representaciones del tiempo que subyacen en el discurso de los textos escolares entregados por el gobierno de Chile, para los cursos de primero y segundo año de Educación Media.

A manera de conclusión plantea que la construcción e interpretación de gráficas donde interviene la variable tiempo, requiere un marco de significados y representaciones compartido por la comunidad matemática y que ha sido constituido a lo largo del desarrollo de la matemática como, respuesta a la necesidad de hacer una representación de la manera en que las cosas varían. El estudio de las representaciones realizadas por los estudiantes sobre fenómenos que presentan variación en el tiempo, mostró una fuerte componente vivencial que incluye una compleja red de significados donde se desconoce la continuidad y posible covarianza de la variable tiempo y por lo tanto, es incluido a la hora de describir variaciones.

Con relación a los elementos característicos, García (2005) plantea que al estudiar las gráficas cartesianas se pueden encontrar tanto elementos informativos internos como externos; los elementos informativos internos pueden ser de dos tipos, por un lado los elementos informativos estructurales que corresponden a escalas, unidades, datos dentro del espacio gráfico (puntos de la línea gráfica o cifras que representen otro tipo de valores), nombres de los ejes y título de la gráfica; y por otro lado los elementos informativos no estructurales, que corresponden a fórmulas o ecuaciones, ilustraciones o iconos, datos numéricos en los ejes gráficos diferentes a las grandes divisiones de la escala; términos y conceptos que pueden ser frases cortas de tipo explicativo, y signos y símbolos.

Los elementos informativos externos son aquellos elementos que se encuentran en el contexto en el cual está insertada la gráfica y que están relacionados significativamente con la misma, por lo tanto se espera que dichos elementos aporten más herramientas para visualizar cómo se asocian los fenómenos o situaciones con la modelación de la variación; entre este tipo de elementos se cuentan: la información relevante, las prácticas científicas asociadas (montajes experimentales, tablas de datos, etc.), las referencias a conceptos específicos, las ecuaciones matemáticas y funciones, y las referencias hechas a fenómenos cotidianos relacionados a la representación gráfica. En la Tabla No. 1 se presenta el resumen detallado de todos los elementos informativos descritos y las respectivas convenciones que se utilizarán en los anexos de éste trabajo.

Tabla 1 Caracterización de los Elementos Informativos de las gráficas

CLASIFICACIÓN		ELEMENTO INFORMATIVO	CONVENCIÓN
ELEMENTOS INFORMATIVOS INTERNOS	Elementos Estructurales	Establecimiento correcto de escalas	Es
		Utilización correcta de unidades	U
		Presentación de datos dentro de la gráfica	D
		Nominación correcta de los nombres de los ejes	N
		Presentación de un título adecuado.	Ti
	Elementos No estructurales	Inclusión de Fórmulas y ecuaciones	Fq
		Inclusión de Datos numéricos	Dn
		Inclusión de Ilustraciones e íconos	Ii
		Inclusión de Términos y conceptos	Tc
		Inclusión de signos y símbolos utilizados en el campo específico	Ss
ELEMENTOS INFORMATIVOS EXTERNOS	Presencia de información relevante para entender los datos trasladados a la gráfica	(Ir)	
	Inclusión de prácticas científicas asociadas a la elaboración de gráficas: experimentos, pruebas, ensayos, tablas de datos	(Pa)	
	Referencia a conceptos pertenecientes al campo específico	(Cc)	
	Inclusión de ecuaciones matemáticas y funciones asociadas a las gráficas	(Ef)	
	Referencia a fenómenos cotidianos relacionados con la representación gráfica	(Fc)	

Con respecto al uso que se le puede dar a las gráficas cartesianas, Jiménez y Perales (2002), establecieron que en los libros de texto se pueden encontrar dos tipos, uso científico o uso didáctico. En el caso de uso científico encontraron que pueden darse dos modalidades:

- Uso Experimental (EXPE): cuando la gráfica se usa para representar el comportamiento de un grupo de datos actuales generado a partir de un trabajo de laboratorio.
- Uso Teórico o modelo (TEO): cuando la gráfica se usa como modelo teórico establecido sobre el comportamiento de algún fenómeno, para poder explicarlo o predecirlo.

De la misma manera en el caso de uso didáctico encontraron la posibilidad de tres casos:

- Uso Expositivo (EXPO): cuando la gráfica se utiliza para relatar o describir principios o fenómenos.
- Uso Problémico (PRO): cuando la gráfica se utiliza para formular preguntas o problemas, planteados o resueltos.

- **Uso Instrumental (INS):** cuando la gráfica se usa como herramienta dentro de un proceso de aplicación experimental desarrollado o propuesto dentro del libro de texto.

Tabla 2 Tipo de uso dado a las gráficas

Uso científico de la gráfica		Uso didáctico de la gráfica		
Uso Experimental	Uso Teórico	Uso Expositivo	Uso Problémico	Uso Instrumental

6 Componente cognitiva

Tiene que ver con los procesos de construcciones mentales que realizan los estudiantes, como son las relaciones entre las representaciones y los procedimientos que realizan para poderse apropiarse del conocimiento. Esta componente pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo el estudiante aprende el objeto?

En el caso particular del presente trabajo se consideró que para poder comprender la manera en que el estudiante modela la variación era necesario indagar sobre el tipo de tareas que se podrían realizar con la información presentada en las gráficas cartesianas y la relación con aspectos concernientes al cambio y la variación.

Precisamente, para analizar el tratamiento de la variación en las gráficas cartesianas Cuevas y Dolores (2007), plantean que “una gráfica cartesiana constituye un medio idóneo para analizar el comportamiento de fenómenos de variación”; en el mismo sentido, Dolores (2009), indaga por la graficación de los cambios que experimentan las variables a través del cálculo de diferencias y la relación de covariación entre las variables que intervienen, dando respuesta a cinco preguntas:

1) **¿Qué cambia?** Identificar qué variables se representarán y su relación entre ellas. Por ejemplo si se trata de la función de caída libre, $s(t) = 4.9t^2$, las variables son la distancia s y el tiempo t relacionadas mediante la función $s(t)$.

2) **¿Cuánto cambia?** Calcular y coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra y representarlos en el plano mediante segmentos de recta; es decir si t cambia de t_i a $t_i + \Delta t$ entonces $s(t)$ cambia de $s(t_i)$ a $s(t_i) + s(t_i + \Delta t)$, de modo que para este Δt corresponde un Δs que se obtiene de la diferencia: $s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$.

3) **¿Cómo cambia?** Coordinar gráficamente la dirección de los cambios de una variable con los cambios en la otra variable. Por ejemplo para la función $s(t)$, supongamos que $\Delta t > 0$; si $\Delta s > 0$ en un determinado intervalo entonces $s(t)$ crece en ese intervalo; si $\Delta s < 0$ entonces $s(t)$ decrece; si $\Delta s = 0$, $s(t)$ no crece ni decrece, se mantiene constante.

4) **¿A qué razón cambia?** Calcular las razones de cambio promedio con incrementos uniformes de cambio en la variable independiente y representarlas gráficamente. La razón de cambio promedio la da el cociente: $\Delta s / \Delta t$, comúnmente conocida como rapidez o velocidad, dependiendo si se trata de magnitudes escalares o vectoriales. En términos gráficos este cociente es la pendiente de un lado rectilíneo de la poligonal en un intervalo determinado.

5) **¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?** Del análisis de los cambios se desprende el comportamiento global de la función en su dominio. La determinación de los intervalos donde $s(t)$ crece, dónde decrece, dónde se mantiene constante. Es claro que con la razón de cambio promedio se obtienen sólo aproximaciones al comportamiento de las curvas, mediante la utilización de la derivada se obtiene mayor fineza.

Para mostrar cómo se presentan estas acciones, a continuación se ilustra como ejemplo, la representación gráfica de la función $y = x^2$ para $-2 \leq x \leq 2$, después de identificar las variables y su relación entre ellas, en la que y cambia si x cambia, se determina **cuánto cambia** una variable con respecto a la cantidad de cambio de la otra; por ejemplo si x cambia una unidad, de -2 a -1 el cambio de y , o sea Δy es igual a -3 lo que indica que el cambio se realiza en forma decreciente; cuando x cambia de -1 a 0 , el cambio en Δy es igual a -1 , indicando un decrecimiento en la gráfica; si x cambia de 1 a 2 , el cambio en Δy es igual a 3 , que corresponde a un crecimiento de la gráfica; si x cambia de 2 a 3 , produce un cambio en Δy de 5 , es decir que la gráfica sigue creciendo; este comportamiento se presenta en forma simétrica con respecto a los valores negativos de las x , es decir decrece a razón variable para x de -2 a 0 y crece también a razón variable de 0 a 2 . Estas consideraciones se ven plasmadas en la siguiente gráfica. (Dolores y Salgado, 2009).

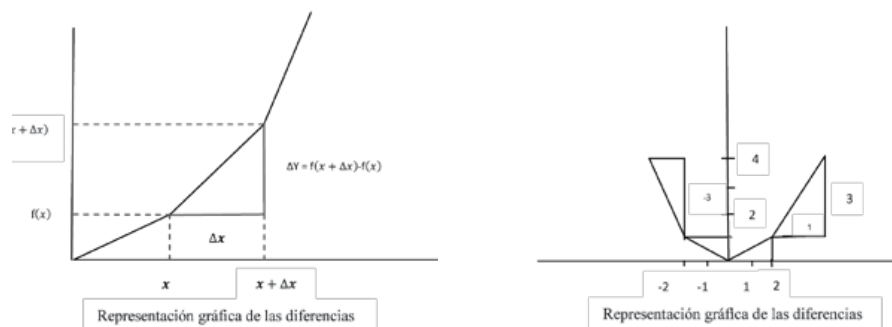


Ilustración 6 Ejemplo de un tratamiento adecuado de la variación

7 Componente social

El propósito de esta componente es dar evidencia y clarificar la existencia de relaciones entre prácticas sociales y conocimiento matemático, con base en la actividad humana la cual reconoce que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención. Busca dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo intervienen las prácticas sociales en la construcción del objeto?

En García (2005) se cita a Bengtsson (1995 p. 565) con su afirmación: “hay una gran cantidad de ocasiones en las cuales es necesaria la habilidad para manejar información a partir de gráficas...y...esta habilidad es particularmente importante en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias donde las gráficas, son utilizadas frecuentemente con usos comunicativos”. Adicional a lo anterior, De Guzmán (1984, citado en García 2005), afirma que un ciudadano promedio debe estar capacitado para la interpretación de gráficas. Es así como a través de las diferentes investigaciones y conclusiones sobre las gráficas cartesianas se resalta la importancia de una enseñanza en las ciencias que promueva el aprendizaje del análisis e interpretación correcto de sus datos. (Campanario y Otero, 2001 citado en García 2005).

Al respecto, este trabajo indaga sobre las aspiraciones que la sociedad colombiana tiene al plantear en sus políticas educativas (Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias), que los ciudadanos aprendan a interpretar correctamente la información presentada a través de gráficas cartesianas, como competencias a desarrollar con el estudio de las Matemáticas y las Ciencias naturales; específicamente se hará un seguimiento a las propuestas realizadas sobre el estudio de fenómenos que involucren situaciones de cambio y variación.

- El Cambio y la Variación en el Currículo de Matemáticas en Colombia

Además del seguimiento epistemológico que se hace al estudio de la variación, a la construcción del concepto de función y al “uso de las gráficas”, es importante precisar cómo en el currículo colombiano se han adoptado estas temáticas.

En los años sesenta en Colombia, al igual que otros países, se adoptan cambios en las temáticas enseñadas en las escuelas, se promueven ciertos temas pertenecientes a la matemática moderna o nueva (teoría de conjuntos, grupos, anillos, cuerpos, vectores, espacios vectoriales...) y al presentarse de manera aislada, sin coherencia, les hizo aparecer como conceptos complejos y difíciles de comprender. Para la década de los setenta, como reacción a esta situación, se gira hacia una matemática más real en las escuelas, cobrando así gran protagonismo las operaciones y los procedimientos algorítmicos; esta corriente tampoco mejoró los resultados, porque aunque los estudiantes se adiestraban en dichos procedimientos muchas veces no comprendían el sentido o significado de sus respuestas. Por tal motivo a mediados de los años setenta, con la intención de construir un currículo que respondiera a las necesidades del país se cimiento la Renovación Curricular de las Matemáticas (MEN, 2002) contemplando así, aspectos legales, filosóficos, epistemológicos, sociológicos, psicológicos y pedagógicos.

Allí se concibió el conocimiento como proceso y como conjunto de experiencias a través del tiempo, transferibles a otras situaciones y presentes en diferentes contextos, “los conocimientos y verdades deben ser revisados permanentemente”, el alumno es el centro del proceso y el maestro su orientador y animador (MEN, 1998).

Para 1990 se construyó el marco general de la Propuesta de Programa Curricular de Matemáticas (MEN, 1990), para la Educación Básica se reconoce la importancia de los diferentes aspectos en la educación integral del individuo, se adopta el enfoque de sistemas (conjunto de objetos con sus relaciones y operaciones), por ejemplo: numéricos, geométricos, métricos, de datos, lógicos, de conjuntos, operaciones y relaciones y analíticos. Los sistemas analíticos son incluidos como reconocimiento de la importancia, necesidad y pertinencia del estudio de situaciones de cambio, enfatizando en situaciones de la vida real, empleando diversos sistemas de representación: analítico, gráfico, tabular, verbal y escrito.

Hacia 1996, reconociendo los aportes y avances de la renovación curricular, se incorporan nuevos elementos provenientes de las investigaciones sobre educación o didáctica de las matemáticas, dando como resultado la construcción participativa de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), en donde se enfatiza la necesidad de contribuir en el desarrollo del pensamiento variacional; superando así la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados, compartimentalizados y avanzando al dominio de un campo conceptual por medio de conceptos y procedimientos

interestructurados que permitan analizar, organizar, y modelar matemáticamente situaciones reales de otras ciencias y de la misma matemática donde la variación sea la materia prima.

Se hace, entonces evidente como se amplía la visión de la variación al intentar cuantificarla por medio de las cantidades y las magnitudes, y al abordar expresamente el estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que se interrelacionan. Los núcleos conceptuales donde se involucra la variación son: las magnitudes, la continuidad de los reales, la función como dependencia, el álgebra en su sentido simbólico de variable y modelos matemáticos de variación aditiva y multiplicativa (cobrando gran importancia la proporcionalidad).

Se plantea que en la vida práctica y el mundo científico, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Se asume que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura para hacerse cada vez más sofisticado y que varias situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas. Además de los tipos de representaciones ya mencionados, los Lineamientos Curriculares contemplan las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas.

Se considera que el uso de las tablas puede iniciar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, pues los procesos aritméticos pueden apoyar la comprensión de variables y fórmulas (la calculadora resulta importante). Aunque se va desarrollando la variación discreta, es necesario introducir la variación continua. En primaria se recomienda el estudio de los patrones en fotografías, en representaciones pictóricas e icónicas para estimular el pensamiento variacional.

También se determina que la gráfica se ha de integrar tempranamente en el currículo dado que aborda aspectos de dependencia entre variables y da origen a la noción de función como dependencia y como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Aunque los modelos más simples de función: lineal, afín, cuadrática, exponencial... encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad, también se hace necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica.

Vemos en los Lineamientos Curriculares registrada la importancia de las gráficas como un elemento clave para abordar aspectos de dependencia entre variables que posteriormente conducirán a la construcción del concepto de función y que a su vez pueden vincular los conceptos con la realidad al analizar los contextos donde aparece la noción de función, estableciendo relaciones funcionales entre las variables en cuestión, “entre los mundos que cambian proveyendo herramientas para predecir comportamientos.” Es así como en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas 2003 publicado por el MEN se puede apreciar la intención del Ministerio de inducir a los estudiantes en la conceptualización de la variación utilizando las gráficas desde tempranas edades y aumentando en complejidad a medida que se avanza de grado. En cuanto al Pensamiento

Variacional y sistemas algebraicos y analíticos, aparece registrado para los diferentes grados así: de Primero a Tercero un estándar hace alusión al uso de gráficas para describir situaciones de cambio y variación, y busca que el estudiante exprese su comprensión de la situación de variación de manera verbal o gráfica para que pueda empezar a construir conceptos de cambio y variación a través de desarrollos sencillos de razonamiento y argumentación. De Cuarto a Quinto: se puede observar cómo con el estándar se busca el desarrollo del conocimiento de variación desde la descripción, interpretación, predicción (pensamientos), análisis y finalmente manejo de la información. La variación será presentada a través de gráficos, secuencias numéricas o tablas. Se puede ver la inclusión de la graficación como práctica social en el estándar al introducir situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales que llevan a pensar en la manifestación de la resignificación y la justificación funcional que se puede presentar en dichos análisis.

En el cuarto y quinto estándar descrito para este nivel se puede manifestar, de alguna manera, la aparición de la modelación, al hacer uso del término predicción e, igualmente, al orientar al manejo de tablas y secuencias numéricas se vislumbra cómo se pretende introducir al concepto de función. En los grados Sexto y Séptimo se continúa con la construcción de los conceptos de variación y cambio al buscar un mayor nivel de comprensión de éstos, cuando se orienta al estudiante para que utilice los conocimientos presentados en cursos anteriores, de manera que a través de situaciones él llegue a sus representaciones: diagramas, tablas, expresiones verbales y parece ser que lo que se busca es que el estudiante transite de una representación a otra, lo cual lo guiará a establecer relaciones entre variables y a conceptos de proporcionalidad para que continúe construyendo a su vez el concepto de función. Es así como uno puede seguir vislumbrando la aparición de la modelación al observar procesos como:

1. Descripción y representación de situaciones.
2. Identificación de variables.
3. Identificación y análisis de relaciones entre variables.
4. Solución de ecuaciones a través del método gráfico.

En los grados Octavo a Noveno se puede observar cómo se pretende que el estudiante ya posea todas las herramientas para hablar propiamente de la modelación del cambio y la variación en situaciones específicas; dado que ya maneja representaciones gráficas, numéricas, verbales y algebraicas, se supone que realiza también el tránsito entre ellas, se espera entonces que esté en capacidad de analizar e interpretar dichas situaciones y, a su vez, de utilizar los objetos matemáticos inmersos allí para que su conocimiento, respecto a la variación y el cambio, sea realmente funcional tanto al interior como al exterior de la escuela.

8 Metodología y desarrollo de la investigación

El presente estudio se llevó a cabo en cuatro fases principales, en la primera se procedió a hacer una minuciosa revisión de los antecedentes de investigación relacionados con el uso de las gráficas cartesianas en los libros de texto, y con el estudio de la variación; al mismo tiempo se elaboró un marco teórico sobre la conformación histórica y epistemológica de la idea de variación, con el fin de identificar aquellas circunstancias que ayudaron a la evolución de dicho concepto. También se revisaron los planteamientos que los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional hacen al respecto.

Categorías de Análisis

Para lograr describir y comprender cómo se usan las gráficas cartesianas en los libros de texto seleccionados para estudiar la variación, en el presente trabajo se definieron cuatro categorías de análisis: tipo de fenómeno en los que se estudia la variación, características de las gráficas cartesianas y sus implicaciones en la presentación del cambio y la variación, clase de uso que se le da a ese tipo de gráficas en el discurso escolar que aparece en los textos, y finalmente, tratamiento dado a la variación en los textos al modelar algunos fenómenos de las ciencias; se pretende que cada una de estas categorías proporcione elementos claves en la consecución de los objetivos propuestos.

Cabe anotar que dichas categorías se adoptaron a la luz de las interpretaciones provenientes de varios estudios e investigaciones realizadas sobre análisis de gráficas y que están consignadas en el marco conceptual de nuestro estudio; a continuación se presentarán en detalle cada una de las categorías de análisis con las que se desarrolló este trabajo.

Tipo de Fenómeno Estudiado

Aunque la cantidad relativa de gráficas cartesianas que muestran la idea de “cambio o modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto” (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005), es bastante pequeña (tal como se mostrará en el corpus documental), existe una gran diversidad de fenómenos que potencialmente podrían usarse para estudiar en detalle la variación (es decir “la cuantificación del cambio”), pues las gráficas encontradas representan la correlación entre dos variables de muy diferente índole; resultando así casi imposible clasificar los fenómenos de manera diferente a la presencia o no de la variable tiempo.

Por lo tanto, con el fin de analizar los diversos tipos de fenómenos que los libros de texto usan para estudiar la variación, en este estudio las representaciones gráficas cartesianas de los fenómenos que exhiben un comportamiento que implica cambio, se clasificarán en dos grupos: por una parte, aquellos fenómenos que incluyen la variable tiempo, como en el caso de gráficas cartesianas de distancia-tiempo, velocidad-tiempo, aceleración-tiempo, crecimiento o decrecimiento en el tiempo de diversas especies, avance de reacción, etc. y por otra parte, aquellos fenómenos en los que el tiempo no está involucrado, como en el caso de las gráficas de temperatura vs calor, presión vs volumen, etc. En ambos casos el análisis se hace sobre la covariación de las variables exhibidas en las gráficas objeto de estudio. La anterior clasificación se sustenta también en dos antecedentes de investigación a partir de los cuales se establece, por una parte, la importancia del trabajo escolar relacionado con el análisis de fenómenos que incluyen la variable tiempo, como en el caso de la investigación de Carrasco (2005), donde analiza las dificultades que presentan los estudiantes para construir, interpretar y trabajar con gráficas de fenómenos de variación que incluyen dicha variable, y por otra, la necesidad de abordar fenómenos que aunque no incluyen el tiempo como variable independiente, si permiten ir construyendo la idea de razón de cambio en el análisis de la variación, Azcárate (1996).

Caracterización de los Elementos Informativos de las Gráficas

Esta categoría fue adoptada de la investigación de García (2005) dado que nos permite analizar qué tanto, y cómo la cantidad de información presente dentro y fuera de la gráfica es útil en los procesos de modelación de la variación en los fenómenos que representan. En la Tabla No. 2 se presenta el resumen de todos los elementos informativos que se analizaron en las gráficas que conforman la muestra del presente trabajo.

Tipo de uso dado a la gráfica

Esta tercera categoría surge ante el cuestionamiento sobre el propósito que tendría usar estas gráficas en una clase o en un texto y el análisis de la variación que ellas permitirían hacer. Las posibles clasificaciones fueron adoptadas de la investigación de Jiménez y Perales (2002), quienes establecieron que en los libros de texto se pueden encontrar dos tipos de uso a saber, un uso científico o un uso didáctico, como ya se mencionó en el marco conceptual. En el caso de uso científico este se puede dar bajo dos modalidades: uso experimental y uso Teórico; de la misma manera, en el caso de uso didáctico encontraron la posibilidad de tres modalidades: uso expositivo, uso problemático y uso Instrumental. En la tabla No. 3, se presenta el resumen de los posibles tipos de uso que se analizarán en las gráficas estudiadas.

Tratamiento de la variación

En esta última categoría ubicada al final de la Tabla No 3. se analiza el tipo de tareas que el estudiante puede realizar en relación con la variación, para ello se adoptó la propuesta de Cuevas y Dolores (2007), donde plantean cinco cuestionamientos acerca de la covariación presente en las gráficas cartesianas, a saber: ¿Qué cambia? ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia? ¿A qué razón cambia? y ¿Cómo se comporta globalmente la gráfica?, preguntas explicadas anteriormente en el apartado de Componente Cognitiva.

Corpus documental

Entre los criterios de selección de los textos que conforman la muestra se cuentan, primero, el hecho de que tuvieran gráficas en las cuales se pudiera visualizar la idea de cambio y variación, teniendo en cuenta que “La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto” y que la “variación implica la cuantificación del cambio”, Cantoral, Molina y Sánchez (2005); segundo, que dichas gráficas permitieran en alguna medida dar respuestas al tratamiento dado a la variación a través de las categorías de análisis adoptadas para este estudio; tercero, atendiendo a las recomendaciones de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), en donde se enfatiza en la necesidad de contribuir en el desarrollo del pensamiento variacional con el propósito de avanzar al dominio de un campo conceptual por medio de conceptos y procedimientos interestructurados que permitan analizar, organizar, y modelar matemáticamente situaciones reales de otras ciencias y de la misma matemática a través de la variación, se decidió escoger textos con fecha de publicación posterior a 2002 esperando que dichas recomendaciones tuvieran alguna incidencia en los textos de ciencias; y cuarto, que los

textos estuvieran ofertados en la página “Colombia Aprende”, donde las editoriales, en asocio con la Cámara Colombiana del Libro y con el aval del Ministerio de Educación, presentan textos a la comunidad en general, y por lo tanto se espera que sean usados con frecuencia en los colegios de la ciudad de Bogotá.

A continuación se presentan para cada una de las tres áreas de estudio un cuadro resumen de las muestras seleccionadas donde se incluye el título del libro, la editorial, el grado correspondiente, el año de publicación, el número total de páginas, el número de gráficas que trabajan de alguna manera el tema del cambio y la variación y el porcentaje de gráficas calculado como el cociente de la cantidad de gráficas asociadas a variación entre el número total de páginas de cada libro, el siguiente cuadro corresponde al área de Biología:

Tabla 4 Cuadro resumen de la muestra de libros de texto de Biología.

TÍTULO	EDITORIAL	GRADO	AÑO	No. PÁG. TOT.	No. GRÁF. (VARIACIÓN)	% GRÁF.
Biología	Mc Graw – Hill	INTEGRADO	2003	639	7	1
Biología	Pearson Prentice Hall	INTEGRADO	2004	1059	45	4
Contextos Naturales	Santillana	OCTAVO	2004	235	4	1
Contextos Naturales	Santillana	NOVENO	2004	239	6	2
Portal de la Ciencia	Grupo Editorial Norma	OCTAVO	2006	248	5	2
Portal de la Ciencia	Grupo Editorial Norma	NOVENO	2006	256	3	1
Navegantes Ciencias	Grupo Editorial Norma	OCTAVO	2008	168	4	2
Navegantes Ciencias	Grupo Editorial Norma	NOVENO	2008	176	4	2
Viajeros Ciencias	Grupo Editorial Norma	OCTAVO	2009	208	9	4
Viajeros Ciencias	Grupo Editorial norma	NOVENO	2009	208	3	1

En este cuadro también se puede observar que el número de gráficas es bastante bajo en cualquiera de los libros seleccionados, en promedio se presentan solamente 2 gráficas por cada 100 páginas y en el mejor de los casos 4 gráficas por cada 100 páginas (en el texto Viajeros Ciencias de grado octavo del grupo editorial norma). Ahora, si la comparación se hiciera contando el número total de gráficas presentes en los textos, el porcentaje se bajaría considerablemente porque en cada página es bastante común encontrar más de una gráfica o ilustración.

Resulta oportuno aclarar que aunque el total de gráficas del cuadro resumen son 90, se estudiaron en detalle 70 dado que del libro de Pearson finalmente se seleccionaron al azar solamente 25 gráficas puesto que las 45 presentaban un comportamiento muy similar.

En el caso de los libros de texto de Física se seleccionaron cuatro libros, tres de grado décimo, y un libro integrado para los grados décimo y once:

Tabla 5 Cuadro resumen de la muestra de libros de texto de Física

TÍTULO	EDITORIAL	GRADO	AÑO	No. PÁG. TOT.	No. GRÁF. (VARIACIÓN)	% GRÁF.
Física I. Conceptos y aplicaciones	Mc Graw – Hill Interamericana	DÉCIMO	2009	379	6	2
Física I	Grupo Editorial Norma	DÉCIMO	2005	296	21	8
Nueva Física 10	Santillana	DÉCIMO	2008	304	16	5
Física. Principios con aplicaciones	Pearson	INTEGRADO	2006	750	39	5

Del cuadro se puede observar que el número de gráficas es bastante bajo; para el texto de la editorial Mc Graw Hill se encontró 2 gráficas por cada 100 páginas, en los textos de Santillana y Pearson el porcentaje aumenta un poco, presentándose 5 gráficas por cada 100 páginas y 8 gráficas en el texto del Grupo Editorial Norma. En el cuadro resumen se relacionan el total de las 82 gráficas estudiadas.

En el caso de Química se revisaron 4 libros de texto: 3 son de grado décimo y uno es para décimo y undécimo. Esta muestra corresponde a textos actualizados, con buena circulación en el mercado y bastante utilizados en los colegios privados de la ciudad de Bogotá; además presentan un número significativo de gráficas útiles para nuestro objeto de estudio. En el cuadro se relacionan las 67 gráficas estudiadas:

Tabla 6 Cuadro resumen de la muestra de libros de texto de Química

TÍTULO	EDITORIAL	GRADO	AÑO	No. PÁG. TOT.	No. GRÁF. (VARIACIÓN)	% GRÁF.
Fund. de Química	Cengage Learning	Dec-Undéc.	2003	872	18	2
Química I	Educar Editores	Décimo	2009	424	32	7
Química I	Editorial Norma	Décimo	2004	294	16	5
Química Inorgánica	Santillana	Décimo	2005	288	47	16

El número de gráficas analizadas por libro según la editorial fue: Educar: 19, Cengage: 18, Santillana: 16 y Norma: 14, para un total de 67 gráficas. En el caso de los textos de Educar y de Santillana las gráficas fueron seleccionadas al azar dado que algunas eran muy similares.

Al delimitar y definir el corpus documental para este análisis del contenido de las gráficas cartesianas de los libros de ciencias, se encontró que en los textos de Química el número de gráficas asociadas con la variación es levemente más alto que en el caso de los textos de Biología y de Física; sin embargo los porcentajes en todos los casos son bajos

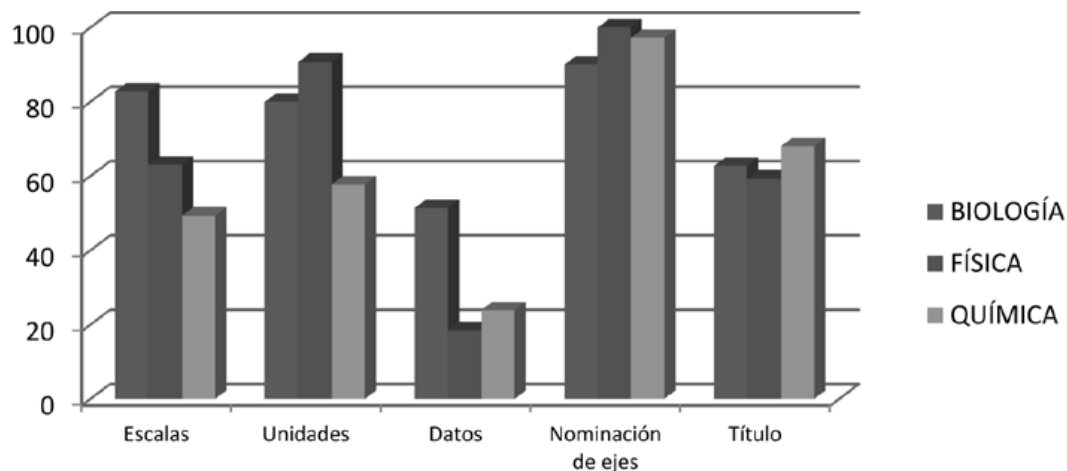
respecto al volumen de páginas de los libros, no se supera el 10% excepto en el caso del texto Química Inorgánica de Editorial Santillana en donde se encuentran 16 gráficas cartesianas por cada 100 páginas del libro.

9 Análisis y resultados

Análisis cruzado de categorías entre las áreas de Biología, Física y Química

Después de examinar la relación existente entre las categorías que se tuvieron en cuenta para analizar las gráficas en cada una de las muestras, se procedió a realizar una comparación entre los resultados obtenidos en las tres áreas de estudio. Como primera medida se encontró que en todos los textos aparecen en mayor porcentaje los Elementos Internos Estructurales, es decir: Nominación en los ejes, Unidades, Escalas, Título y en menor proporción la inclusión de Datos adicionales dentro de esta clase de elementos; la inclusión de Elementos Internos no Estructurales y de Elementos Externos, en general resulta ser significativamente menor salvo contadas excepciones que se entrarán a detallar más adelante, también se mostrará que la anterior situación concuerda con los resultados obtenidos sobre los tipos de uso científico y didáctico y con las preguntas sobre cambio y variación que pueden ser respondidas con las gráficas estudiadas.

A continuación, en la gráfica No. 1 se contrastan los porcentajes de uso de los elementos Internos Estructurales presentes en las gráficas de los textos de las tres áreas estudiadas.



Gráfica 1 Comparativo: Distribución porcentual de Elementos Internos Estructurales en las tres áreas.

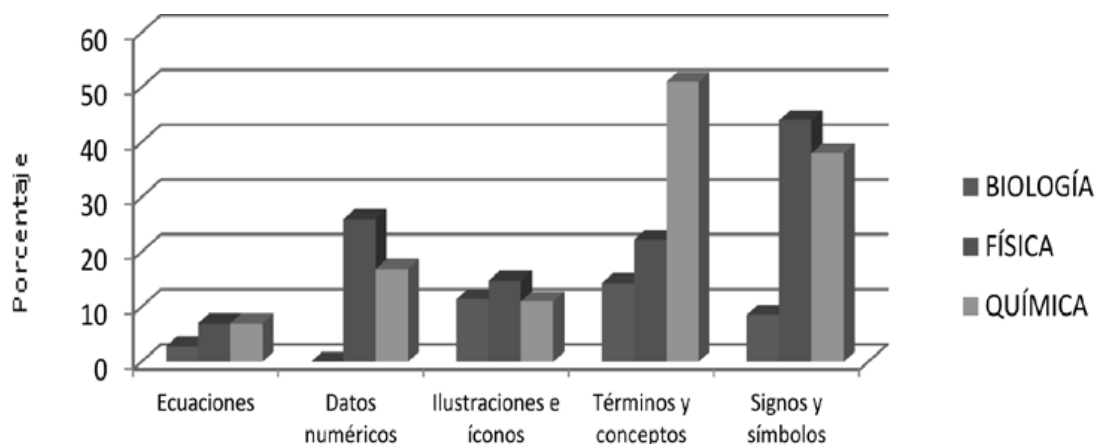
Con relación a los Elementos Internos Estructurales, en la misma gráfica se observa una marcada tendencia, por parte de los autores de los textos de las tres áreas, a presentar en la mayoría de las gráficas la **nominación en los ejes** lo cual permite dar respuesta a la primera pregunta del tratamiento de la variación: qué es lo que cambia, además, cómo se puede observar en la gráfica No. 6 este interrogante es el que se responde en la gran mayoría de gráficas o a partir de ellas. En los textos de Biología se observó una buena presencia de las **escalas y las unidades** que concuerda con el tipo de **uso didáctico problemático** que le dan a sus gráficas, al proponer al estudiante actividades que en su mayoría se relacionan con lectura de puntos dentro del gráfico. En los textos de Física,

aunque aparecen relacionadas las unidades en un buen número de gráficas, solamente se incluyen las escalas en el 63% de la muestra, promoviendo más bien el tipo de *uso didáctico expositivo*, al igual que sucede con las gráficas de los textos de Química en donde la inclusión de estos dos elementos es apenas del 49,3% y 57,7% respectivamente.

Mientras que los textos de las tres áreas estudiadas presentan el Título en proporciones cercanas al 60% de las gráficas; en el caso de Datos adicionales que favorezcan la comprensión de los fenómenos objeto de estudio, en los textos de Biología son incluidos en la mitad de las gráficas de la muestra, y en el caso de Química y Física no alcanzan a la cuarta parte, concordando nuevamente con los tipos de uso didáctico de cada área.

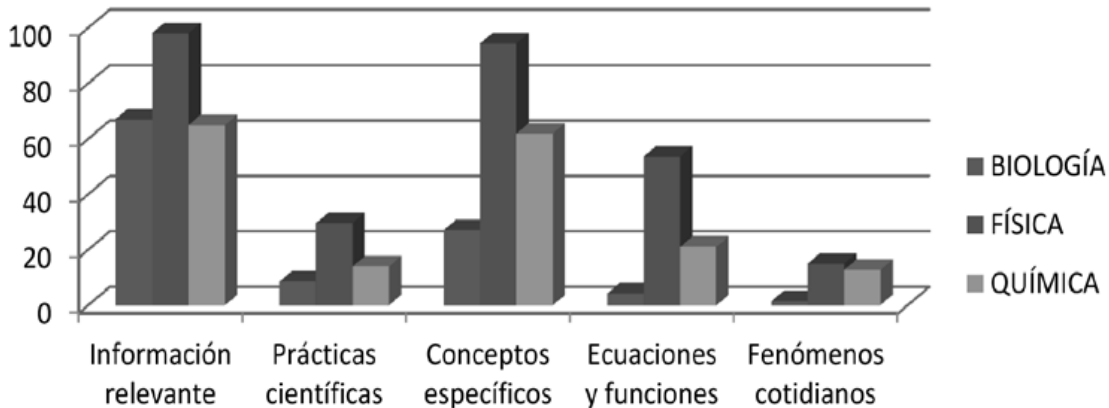
En cuanto a los Elementos Internos no Estructurales en la gráfica No.2 se observa, en general, que para los tres grupos de muestra de textos, los porcentajes son bastante bajos y menores a los Elementos Internos Estructurales; aunque se detecta un porcentaje superior al promedio de este tipo de elementos para Términos y Conceptos: 51% en los textos de Química, tal vez por el tipo de uso didáctico expositivo que se hace de sus gráficas. Otro elemento cuyo porcentaje también fue significativo es la presencia de Símbolos con porcentajes de 44% y 38% para los textos de Física y Química respectivamente. Se demuestra que a pesar de la especificidad del lenguaje que manejan los textos estudiados de estas tres ciencias, los autores parecen no mostrar interés por la apropiación de términos científicos por parte de los estudiantes, debido a los resultados encontrados en estos elementos.

Por otro lado los bajos porcentajes del elemento Ecuaciones, cómo se puede ver en el diagrama de barras (inferior al 10% en las tres áreas), puede limitar el análisis que se puede hacer de la variación y el cambio e impedirá que el estudiante cuente con una herramienta diferente para representar y comprender la manera como dos variables están relacionadas y por lo tanto cuantificar algebraicamente el cambio de dichas variables. De manera similar la no inclusión de Datos numéricos no facilita la cuantificación de cambios representados en la gráfica. En la gráfica No. 2 se aprecia la presencia de Elementos internos no Estructurales en las gráficas de los textos de las tres áreas objeto de estudio.



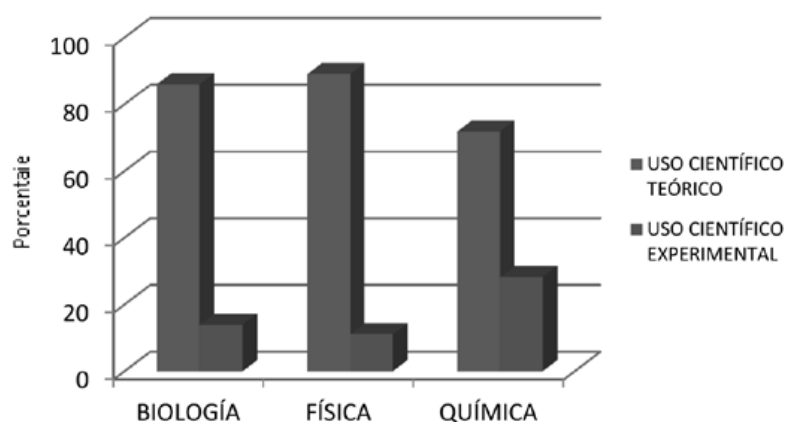
Gráfica 2 Comparativo: Distribución porcentual de Elementos Internos no Estructurales en las tres áreas.

Teniendo en cuenta los Elementos Externos presentados en la gráfica No. 3, se observa que la Información Relevante y los Conceptos específicos tienen una alta presencia en los textos de Física y de Química, y aunque en Biología la presencia de este tipo de elementos es menor, no deja de ser importante, coincidiendo con el uso científico teórico que se hace de las gráficas en la mayoría de todos los textos pues dicha Información Relevante en esencia tiene como propósito hacer la presentación de las gráficas y/o explicar principios teóricos representados en las gráficas haciendo uso de Conceptos específicos en especial en el caso de Química y Física. También es de resaltar el hecho de que en los textos de Física es donde se encuentra mayor presencia de Ecuaciones aunque no sobrepasan el 54%, mientras que para los textos de Química y Biología este elemento se presenta tan solo en un porcentaje del 21% y 3% respectivamente. Los bajísimos porcentajes de inclusión de Prácticas científicas y relación a Fenómenos cotidianos en las tres áreas concuerdan perfectamente con los altos niveles de uso de tipo científico teórico y la ausencia de gráficas con uso didáctico instrumental que se muestran en las gráficas No. 4 y 5, respectivamente.



Gráfica 3 Comparativo: Distribución porcentual de Elementos Externos en las tres áreas.

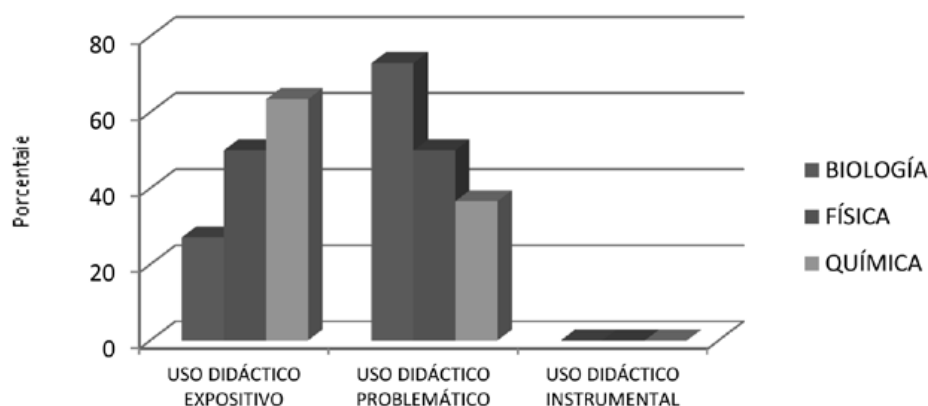
Ahora, en cuanto el tipo de uso científico se encontró que en las tres disciplinas se hace principalmente un uso científico teórico, pues como se puede observar en la gráfica No. 4 el uso científico experimental no supera el 33,8% en ninguna de las tres disciplinas; esto implica que el uso que se hace de las gráficas en los textos consiste esencialmente en ilustrar la relación teórica e ideal que existe entre las variables que intervienen en el fenómeno, para ello los autores hacen uso principalmente de Información relevante y Conceptos específicos en su discurso. Esto concuerda con la bajísima inclusión de: Prácticas científicas asociadas como tablas de valores, Datos numéricos, Ecuaciones y funciones y la relación con Fenómenos cotidianos entre otros elementos informativos que permitirían al estudiante una mejor modelación de la variación dado que esos elementos permitirían el tránsito entre diferentes tipo de representación, una mejor interpretación de los cambios presentes en las variables y en general una mayor comprensión del fenómeno estudiado.



Gráfica 4 Comparativo Distribución porcentual del tipo de uso científico en las tres áreas.

En relación al tipo de uso didáctico, se puede observar en la gráfica No. 5 que ninguno de los textos de las tres áreas presentan gráficas a las cuales se les diera un uso didáctico instrumental, ya que ninguna forma parte de un proceso planteado en una práctica de laboratorio donde el estudiante tenga que realizar mediciones, tabular datos, ubicar puntos en el plano cartesiano, analizar cómo varían los datos, ajustar las curvas obtenidas; en otras palabras el estudio de las ciencias en secundaria no promueve significativamente procesos de modelación en los que el estudiante debe recoger información, sistematizarla, ubicar modelos matemáticos que describan con el menor error los datos encontrados, analizar la precisión en los procesos de medición, descartar variables, etc.

En los textos de Biología se encontraron principalmente gráficas que aunque contenían “problemas” que les permitían ser clasificadas como de uso didáctico experimental (72,9%), tendían a ser expositivas porque las preguntas que contenían dichos problemas buscaban esencialmente reafirmar la teoría expuesta por el autor, acudiendo a lecturas de valores específicos, descripción cualitativa del comportamiento del fenómeno y, en algunos pocos casos, interpolar y/o extrapolar algunos valores de las mismas. El 27,1% restante de las gráficas tenían un uso netamente didáctico expositivo dado que se incluían con la intención de ilustrar los principios expuestos por el autor sin llegar a plantear cuestionamientos al estudiante. Las tendencias de uso descritas concuerdan con el tipo de elementos informativos que incluían las gráficas, pues se les podía asignar determinado uso a pesar de no incluir la mayoría de Elementos Internos Estructurales ni elementos Externos.



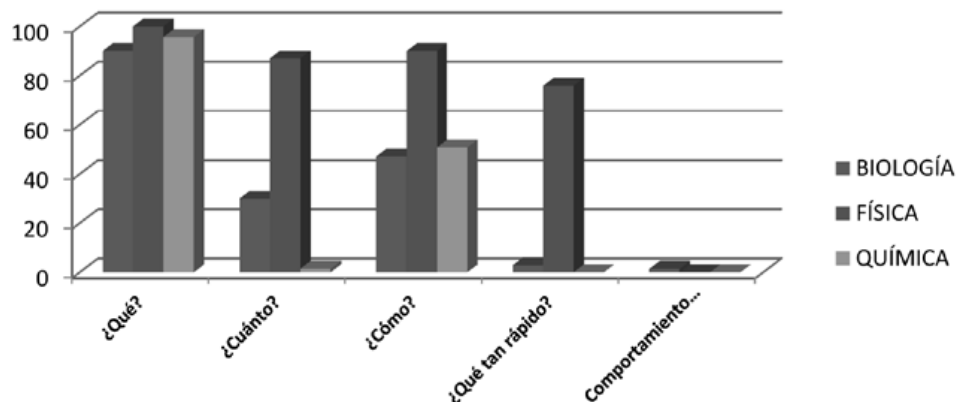
Gráfica 5 Comparativo Distribución porcentual del tipo de uso didáctico en las tres áreas.

En los textos de Física se encontró que las gráficas a las que se les da un uso didáctico problemático contenían una cantidad importante de Elementos Externos y Elementos Internos no Estructurales, enriqueciendo así las actividades que se le proponen al estudiante, de igual forma se encontró un porcentaje muy similar en las gráficas con uso didáctico expositivo, dejando ver así un balance entre lo teórico con en el uso expositivo y lo práctico con el uso problemático.

En los textos de Química se observó que a las gráficas se les da esencialmente un uso didáctico expositivo y científico teórico y que responden a las preguntas ¿Qué cambia? y ¿Cómo cambia?, al presentar elementos informativos con énfasis descriptivo cualitativo y en los que no se busca la realización de cálculos sino solamente la explicación de fenómenos teóricos; también se observó que las gráficas están más enfocadas a la exposición de fenómenos, esto relacionado con los bajos porcentajes de Datos (23,9%), Escalas (49,3%) y Unidades (57,7%).

Dado que la inclusión de los Elementos Internos Estructurales, Información Relevante, Conceptos específicos y respuestas a las preguntas que dan cuenta del Tratamiento dado a la variación es significativa en los textos de Física, consideramos que éstos, a pesar de ofrecer un tratamiento teórico que no incluye gráficas de uso didáctico instrumental, que promuevan actividades más experimentales y prácticas asociadas a la ocurrencia de fenómenos reales, permiten un trabajo inter-áreas interesante, al presentar una mayor interrelación de los fenómenos físicos con las ideas matemáticas de variación.

En la gráfica No. 6 se puede observar cómo las gráficas de Física son las que precisamente permiten dar más respuestas sobre el comportamiento de las variables que intervienen en la modelación de los fenómenos. Sin embargo también se evidencia que en los textos de ciencias analizados hay una presencia casi nula de elementos que contribuyan a analizar el comportamiento global de la gráfica, como por ejemplo la inclusión de variaciones instantáneas en las variables, es decir de derivadas; ya que, como se registró en la descripción histórica de la evolución de las ideas de variación y cambio, en la época del siglo XV al XVIII la preocupación era analizar cómo cambiaban las variables en movimiento, intensidad luminosa e intensidad de calor. Por todo esto, se considera que la escuela debería aportar este tipo de elementos que contribuirían a mejorar el aprendizaje no sólo de las matemáticas sino de los diferentes fenómenos y principios de las ciencias en general.



Gráfica 6 Comparativo Distribución porcentual Respuestas a las preguntas que muestran el tratamiento dado a la variación.

En cuanto a las preguntas relacionadas con la variación se detectó que encontrar respuesta a la pregunta de ¿Cuánto cambia eso que cambia? en las gráficas de los textos de Química presentan un porcentaje bastante bajo (1,4%), con respecto al presentado en las gráficas de los textos de Biología (30%) y Física (87%), lo cual es acorde al alto porcentaje que aparece en las Escalas (82% y 63%) y en las Unidades (80% y 90,7 %). Hallar respuesta a la pregunta ¿Qué tan rápido cambia?, revela que en las gráficas de los textos de Biología es nula su presencia, en las gráficas de Química alcanza sólo un 2,9% mientras que en las gráficas de Física se encuentra en un porcentaje mucho mayor, el 75,9% lo cual es acorde con la presencia de Conceptos Específicos (94,4%) y de Ecuaciones (53,7%), ya que en el discurso anexo hacen referencia a cálculos sobre razones de cambio como por ejemplo la velocidad y la aceleración. En general, en el caso de las gráficas incluidas en los textos de Biología se observa que dan respuesta esencialmente a las preguntas ¿qué?, ¿cómo? y ¿cuánto cambia? haciendo uso de los Elementos Internos Estructurales que son los que contienen principalmente; mientras tanto las gráficas de Química dan respuesta a las preguntas ¿qué? y ¿cómo cambia?, valiéndose de la información presentada en la Nominación de los ejes, Términos, Signos, Conceptos específicos e Información relevante adjunta.

10 Conclusiones

La muestra seleccionada de las representaciones gráficas cartesianas de los textos de Biología, Física y Química presenta insuficiencias en cuanto a la cantidad de gráficas que se ocupan del estudio del cambio y la variación, y en la inclusión de Elementos Internos no Estructurales y Elementos Externos, que resultan ser indispensables para una mejor comprensión de los fenómenos de las Ciencias Naturales. Precisamente la escasa presencia de Ecuaciones, Ilustraciones, Datos numéricos, Términos y conceptos, Signos y símbolos, Prácticas científicas, y relación a Fenómenos cotidianos, hace que las gráficas se presenten como productos acabados, teóricos y descontextualizados (García 2005); ofreciendo así mínimas posibilidades de actuar sobre ellas en un proceso adecuado de interpretación de la variación o limitando a un análisis cualitativo de cómo modelan las gráficas cartesianas la variación, ya que se responde en un gran porcentaje a qué cambia y cómo cambia eso que cambia.

En la muestra de gráficas cartesianas de los tres tipos de textos se observa que les dan uso científico teórico en un alto porcentaje, dejando de lado procesos experimentales como herramienta esencial para su construcción. Esto puede inducir al estudiante a creer que la gráfica de uso científico teórico es una representación real del fenómeno o es un producto aislado de los procesos que supone su construcción; además reafirma el hecho de que se encuentre un tratamiento de la variación de tipo cualitativo o cuantitativo superficial al responder básicamente a las preguntas de qué es lo que cambia y cómo cambian las variables; es decir, el estudiante podrá apropiarse de los términos que describen las magnitudes involucradas en el fenómeno y hacer descripciones de cómo aumenta, disminuye, crece o decrece, sin que esto implique la cuantificación del cambio y por lo tanto, no se realizará un análisis profundo de la variación que conlleve a la modelación de los fenómenos.

En cuanto al uso didáctico se observa que la tendencia de los autores es a presentar las gráficas cartesianas como de uso didáctico expositivo, aunque en la gráficas de los

textos de Biología aparentemente presentan más un uso didáctico problemático; este resultado como ya se mencionó, se debe a que son situaciones en las que se plantean una serie de preguntas con la intención de reafirmar lo expuesto en el discurso, sin favorecer la posibilidad de desarrollar las competencias científicas en el estudiante asociadas con la modelación y análisis de fenómenos de las ciencias. Con esta tendencia, nuevamente se detecta que en los textos de Ciencias el tratamiento que se hace de la variación es esencialmente cualitativo, tanto así que podría concluirse que no se hace un análisis profundo de la variación sino un reconocimiento del cambio de medidas o estados en dos magnitudes que aparecen correlacionadas en el fenómeno.

A pesar de que Física, Química y Biología son disciplinas prácticas experimentales, que podrían servir de marco para modelar fenómenos de manera matemática, lo que permitiría una mejor interpretación de la representación gráfica por parte del estudiante, el énfasis encontrado en los libros no es éste, pudiendo así generar deficiencias en la apropiación de conceptos, leyes y principios por parte del estudiante; esto se evidenció por la no presencia de gráficas cuyo uso fuera didáctico instrumental que promoviera la toma, representación, análisis y ajuste de datos dirigido al establecimiento de modelos matemáticos en los que el estudiante pudiese desarrollar su capacidad de observar, conjeturar, comprobar, descartar y/o replantear hipótesis sobre diferentes fenómenos, (actividades propias del quehacer científico).

Con lo anterior, se puede concluir que el uso dado a las gráficas estudiadas va en contravía a los planteamientos de los Lineamientos Curriculares de Ciencias Naturales (MEN 1998) donde se plantea que "... es importante señalar desde ahora que continuar con aquellas guías de laboratorio en las que se le dan instrucciones precisas sobre las operaciones experimentales que debe ejecutar y las observaciones y medidas que debe realizar para después preguntarle a qué conclusiones puede llegar y después inducirlo a dar las conclusiones "a las que había que llegar" no tienen sentido dentro del marco de esta propuesta de renovación curricular, pedagógica y didáctica... Hemos dicho que la enseñanza de las ciencias debe reproducir sus procesos de construcción y no los de exposición. Las guías a las cuales hemos hecho mención están concebidas desde una perspectiva expositiva. Se trata de ilustrar un principio que ya "se le ha enseñado al alumno".

En general, La modelación del objeto de conocimiento, en este caso de la variación, no se observa de manera significativa en las gráficas cartesianas de los textos de Ciencias; aunque en los textos de Física se encontró una leve mayor frecuencia de esta modelación, la escasa presencia de gráficas que posean estas características dificulta una mayor y mejor interpretación de los fenómenos por parte de los estudiantes. En todo caso resulta importante resaltar que en esta disciplina, a diferencia de las otras dos, se encuentran un número importante de elementos que pueden ser aprovechados en el discurso de la clase para orientar al concepto de la modelación de la variación en fenómenos de movimiento.

También se podría pensar, cómo lo sugiere García (2005) que en los textos de Ciencias "...existe una tendencia a utilizar las gráficas cartesianas más como ilustraciones informativas que como instrumentos que ayuden a establecer las relaciones que se presentan entre las variables". Y el hecho de que las gráficas estudiadas no permitan

establecer las relaciones que se presentan entre las variables involucradas implica que no favorecen el análisis de cómo y cuánto están cambiando ni el desarrollo del razonamiento y de la argumentación en los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- [1] Arbeláez, F. (2004), Contextos Naturales 9, Bogotá, Santillana.
- [2] Arbeláez, F. y Aristizabal, J. (2009), Viajeros Ciencias 8, Bogotá, Norma.
- [3] Arbeláez, F. y Chica, C. (2009), Viajeros Ciencias 9, Bogotá, Norma.
- [4] Azcàrate, C., Martí, E., Bosh, D., (1996), Cálculo diferencial e integral. Madrid, Síntesis.
- [5] Barrera S. Pilar C. (2005), Física 1, Bogotá, Norma.
- [6] Bejarano, C. y Castelblanco, Y. (2006), Portal de la Ciencia 8, Bogotá, Norma
- [7] Bejarano, C. y Castelblanco, Y. (2006), Portal de la Ciencia 9, Bogotá, Norma
- [8] Beltrán, H. y Sarria, A. (2008), Navegantes Ciencias 9, Bogotá, Norma
- [9] Bautista, M. y Saavedra, O. (2008), Física 10, Bogotá, Santillana.
- [10] Bautista, J. (2009), Química I, Bogotá, Educar.
- [11] Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos ejemplos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial, (pp. 83–102). México.
- [12] Cantoral, R., Molina, J. & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez & J. Molina (Eds.) Acta latinoamericana de Matemática Educativa 18 (463-468). México: Clame.
- [13] Carrasco, E. (2005) Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo. Instituto Politécnico Nacional, México
- [14] Carrillo, E. (2004), Contextos Naturales 8, Bogotá, Santillana.
- [15] Castelblanco, S. (2004) Química I. Bogotá, Norma.
- [16] Castiblanco, A y Moreno, L. (2004) Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional.
- [17] Cen, C. (2006). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

- [18] Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79. Versión en español del artículo: Cordero, F. (en prensa) (aceptado para ser publicado en el 2005).
- [19] Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10, 1, pp. 7-38.
- [20] Dolores, C., Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 69-96.
- [21] Dolores, C. y Salgado, G. (2009) Elementos para la graficación covariacional. *Números*. Vol 72. pp. 63-74
- [22] Díaz, L. (2007) Coherencias Cognitivas vs matemáticas en el estudio del cambio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- [23] Dolores C., Martínez G., Navarro C. y Farfán R. M. (Editores) (2006). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. Centro de Investigación en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero. En prensa
- [24] Dolores C. (2000). Algunos elementos acerca de la variación. *Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 13, Universidad Autónoma de Santo Domingo, pp. 88-96.
- [25] Douglas C. (2006), *Física. Principios con aplicaciones*, Bogotá, Pearson.
- [26] García, E. y Tuyub, I. (2007). Un estudio socioepistemológico del concepto de función. Documento interno. Manuscrito no publicado, IPN, México.
- [27] García, J. (2005). La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula. Granada, Editorial de la Universidad de Granada.
- [28] García, J. y Perales, F. (2007). ¿Cómo usan los profesores de Química las representaciones gráficas cartesianas? *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 10 (1), 1-15.
- [29] Gaviria, M y Sarria, A. (2008), *Navegantes Ciencias* 8, Bogotá, Norma.
- [30] Jiménez, J. y Perales, F. (2002). Las ilustraciones en la enseñanza - aprendizaje de las ciencias. *Análisis de libros de textos*. *Revista Enseñanza de las ciencias [en línea]* año 3, núm. 20, pp. 369 – 386, recuperado 30 de abril de 2009.
- [31] Levine, M. (2004), *Biología*, Bogotá, Pearson Prentice Hall.

- [32] Mader, S. (2003), *Biología*, Blanco, L. y Correa, M. (trad.), México, Mc Graw Hill.
- [33] Melo, C. (2007) *Soluciones 8*, Bogotá, Futuro
- [34] MEN (1998) *Lineamientos Curriculares de Ciencias Naturales*. Colombia.
- [35] MEN (1998) *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Colombia.
- [36] MEN (2003) *Estándares Básicos de Competencias de Ciencias Naturales*. Colombia.
- [37] MEN (2003) *Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas*. Colombia.
- [38] “MEN” (2010) [en línea], disponible en: http://64.76.190.172/textos_escolares/contenidos/resultado_busqueda.php
- [39] Mondragón, C. (2005), *Química Inorgánica*, Bogotá, Santillana,
- [40] Morris, A. (2003), *Fundamentos de Química*, Bogotá, Cengage Learning.
- [41] Suárez, L. (2006) *El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico*. Memoria predoctoral, México.
- [42] Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, ISSN 1850-6666, Año 3, N° 1, 2008, pp. 51-58.
- [43] Tippens, P. (2009), *Física 1. Conceptos y aplicaciones*, Bogotá. Mc Graw Hill.
- [44] Youschkevitch (1976), *The concept of function up to the middle of the 19th century*, (R. Farfán, trad) en *Traducciones 2* (1996) CINVESTAV – IPN, México.

Dirección de los autores

Constanza Arias Hernández

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá - Colombia
constanza.arias@gmail.com

Luis Hernando Leal

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá - Colombia
LHL2002@hotmail.com

Martha Lilia Organista Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá - Colombia
liliaorganista@gmail.com